CAPÍTULO 17

Optimización: aplicaciones

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ilustrar una amplia variedad de aplicaciones para los procedimientos de optimización.
- Reforzar la habilidad para la formulación de problemas.
- Reforzar la habilidad para la interpretación de los resultados matemáticos.

ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Posibilidades de una construcción de tuberías

Una importante compañía petrolera está planeando construir tuberías para transportar petróleo crudo desde los pozos principales hasta un punto en donde el crudo se cargará en camiones cisterna y se enviará a las refinerías. Las tuberías deberán construirse a través de dos tipos diferentes de terreno, uno relativamente árido, y otro boscoso y denso. Los costos de construcción varían de manera significativa dependiendo del terreno. *La compañía desea determinar un plan de construcción que minimice el costo de construcción de la tubería* (ejemplo 17).

En el capítulo 16 se proporcionan las herramientas de optimización clásica. Es decir, se ofrece un método para examinar funciones con el fin de localizar los puntos máximos y mínimos. Este capítulo estará dedicado a ilustrar el uso de esos procedimientos en diversas aplicaciones. Cuando el lector comience este capítulo, no olvide que estos problemas aplicados exigen una traducción de la formulación verbal del problema a una adecuada representación matemática. Hay que tener cuidado y definir las variables (incógnitas) con exactitud. Una vez obtenida una solución matemáticamente derivada, un elemento esencial del proceso problema-solución lo constituye la traducción del resultado matemático a una recomendación práctica en el ámbito de la aplicación. A medida que se avance en este capítulo, se utilizará alguna o todas las etapas de este proceso problema-solución, como se muestra en la figura 17.1.

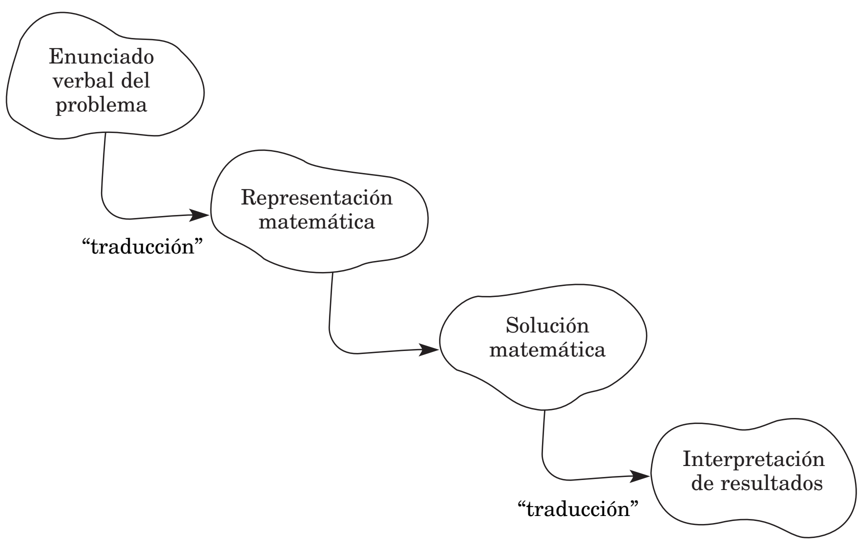

Figura 17.1 Proceso de solución de problemas.

17.1 Aplicaciones del ingreso, costo y utilidad

Aplicaciones del ingreso

Las siguientes aplicaciones se centran en la maximización de los ingresos. Recuérdese que el dinero que *entra* a una organización por la venta de productos o la prestación de servicios recibe el nombre de ***ingreso***. Y la manera fundamental de calcular el ingreso total conseguido con la venta de un producto (o servicio) es

Ingreso total = (precio unitario)(cantidad vendida)

En esta relación se supone que el precio de venta es igual para todas las unidades vendidas.

Ejemplo 1

La demanda del producto de una compañía varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual R (expresado en miles de dólares) es una función del precio p (en dólares). En concreto,

$$R = f(p) = -50p^2 + 500p$$

a) Determine el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total.
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

SOLUCIÓN

a) En el capítulo 6 se dijo que la función de ingreso es cuadrática y que su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. De este modo, el valor máximo de R ocurrirá en el vértice. La primera derivada de la función de ingreso es

$$f'(p) = -100p + 500$$

Si se hace $f'(p)$ igual a 0,

$$\begin{aligned} -100p + 500 &= 0 \\ -100p &= -500 \end{aligned}$$

u ocurre un valor crítico cuando

$$p = 5$$

Aunque se sabe que un máximo relativo ocurre cuando $p = 5$ (por el conocimiento que se tiene de las funciones cuadráticas), verifique formalmente esto mediante la prueba de la segunda derivada:

$$f''(p) = -100 \qquad \text{y} \qquad f''(5) = -100 < 0$$

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en f cuando $p = 5$.
b) El valor máximo de R se calcula sustituyendo $p = 5$ en f, o

$$\begin{aligned} f(5) &= -50(5^2) + 500(5) \\ &= -1\,250 + 2\,500 = 1\,250 \end{aligned}$$

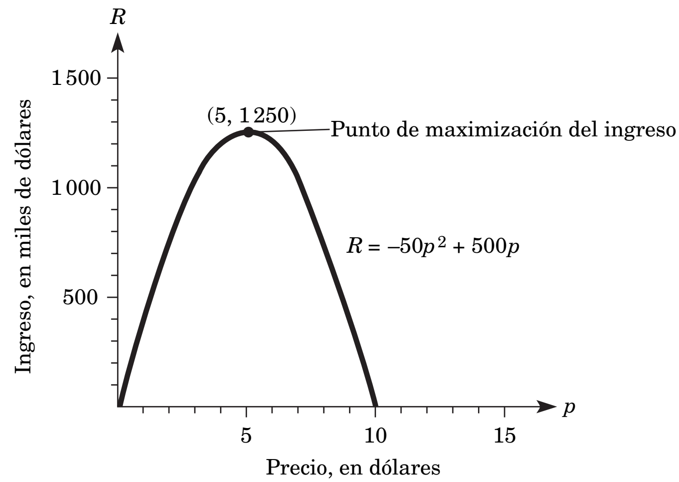

Figura 17.2 Función cuadrática de ingreso.

Así pues, se espera que el ingreso total anual se maximice en \$1 250 (miles), es decir, \$1.25 millones cuando la empresa cobre \$5 por unidad. La figura 17.2 muestra una gráfica de la función del ingreso. ❑

NOTA Esto ya se mencionó antes en el libro, cuando se hizo referencia a las aplicaciones; sin embargo, vale la pena repetirlo. Es muy frecuente que los estudiantes resuelvan un problema expresado con palabras, encuentren la solución, pero que carezcan de la habilidad de interpretar los resultados dentro del marco de la aplicación. Si el lector queda atrapado en la mecánica de la obtención de una solución y pierde temporalmente su marco de referencia respecto del problema original, vuelva a leer el problema, fijándose especialmente en cómo se definen las variables. También repase las preguntas que se hacen en el problema. Esto le ayudará a recordar los objetivos y la dirección que deberá seguir.

Ejemplo 2 (**Administración del transporte público**) Las autoridades de tránsito de una gran área metropolitana han aprobado la estructura de tarifas que rige el sistema de autobuses públicos de la ciudad. Se abandonó la estructura de tarifas por zona en la cual la tarifa depende del número de zonas por las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema tiene tarifas fijas: el pasajero puede viajar por el mismo precio entre dos puntos cualesquiera de la ciudad.

Las autoridades de tránsito han encuestado a los ciudadanos a fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa fija admitiera diferentes importes. Basándose en los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada de la demanda, la cual expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. En concreto, la función de demanda es

$$q = 10\,000 - 125p$$

donde q representa el número de pasajeros por hora y p la tarifa en centavos.

a) Determine la tarifa que se cobraría con objeto de maximizar por hora el ingreso por la tarifa de los autobuses.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?

c) ¿Cuántos pasajeros por hora se esperan con esta tarifa?

SOLUCIÓN

a) El primer paso es determinar una función que exprese el ingreso por hora según la tarifa *p*. Se escoge *p* como variable independiente porque se querría determinar la tarifa que produciría el ingreso máximo total. Por otra parte, la tarifa es una ***variable de decisión***, aquella cuyo valor puede fijar la administración de las autoridades de tránsito.

La expresión general del ingreso total es, como se señaló antes,

$$\boxed{R = pq}$$

Pero en esta forma *R* se expresa en función de dos variables: *p* y *q*. *En este momento* no se puede tratar la optimización de funciones con más de una variable independiente. Sin embargo, la función de demanda establece una relación entre las variables *p* y *q* que permiten transformar dicha función en una, en que *R* se expresa en función de la variable independiente *p*. El miembro derecho de la función de demanda es una expresión que establece *q* en términos de *p*. Si con esta expresión se sustituye *q* en la función de ingreso, se obtiene

$$\begin{aligned} R &= f(p) \\ &= p(10\,000 - 125p) \end{aligned}$$

o bien

$$R = 10\,000p - 125p^2$$

La primera derivada es

$$f'(p) = 10\,000 - 250p$$

Si la derivada se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} 10\,000 - 250p &= 0 \\ 10\,000 &= 250p \end{aligned}$$

y un valor crítico ocurre cuando

$$40 = p$$

La segunda derivada se obtiene y evalúa cuando $p = 40$ para determinar la naturaleza del punto crítico:

$$f''(p) = -250$$

$$f''(40) = -250 < 0$$

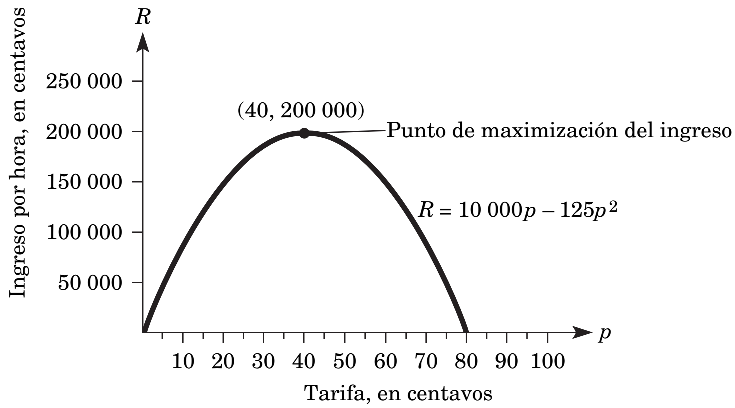

Figura 17.3 Función cuadrática de ingreso.

Así pues, ocurre un máximo relativo para f cuando $p = 40$. Puesto que f es cóncava hacia abajo en todas partes, la interpretación de este resultado es que el ingreso por hora se maximizará cuando se cobre una tarifa fija de \$0.40 (40 centavos de dólar).

b)

$$\begin{aligned} f(40) &= 10\,000(40) - 125(40)^2 \\ &= 400\,000 - 200\,000 = 200\,000 \end{aligned}$$

Dado que la tarifa se expresa en centavos, el máximo ingreso por hora esperado será de 200 000 centavos, o sea \$2 000.

c) El número de pasajeros que se espera cada hora con esta tarifa se calcula sustituyendo la tarifa en la función de demanda, es decir,

$$\begin{aligned} q &= 10\,000 - 125(40) \\ &= 10\,000 - 5\,000 \\ &= 5\,000 \text{ pasajeros por hora} \end{aligned}$$

La figura 17.3 contiene una gráfica de la función de ingreso por hora. ❑

Aplicaciones del costo

Según se mencionó antes, los costos representan *salidas de efectivo* para la organización. La mayor parte de las empresas buscan el modo de reducirlas al mínimo. En la presente sección se dan aplicaciones que se refieren a la minimización de alguna medida del costo.

Ejemplo 3

(**Administración del inventario**) Un problema común de las organizaciones es determinar qué cantidad de un artículo deberá conservarse en almacén. Para los minoristas, el problema se relaciona a veces con el número de unidades de cada producto que ha de mantenerse en inventario. Para los productores consiste en decidir qué cantidad de cada materia prima debe estar disponible. Este problema se identifica con un área o especialidad, denominada ***control del inventario*** o ***administración del***

inventario. Por lo que respecta a la pregunta de cuánto "inventario" ha de conservarse, el hecho de tener demasiado, poco o mucho inventario puede acarrear costos.

Un minorista de bicicletas motorizadas ha analizado los datos referentes a los costos, y determinó una función de costo que expresa el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del tamaño (número de unidades) de cada pedido de bicicletas que coloca. He aquí la función de costo

$$C = f(q) = \frac{4\,860}{q} + 15q + 750\,000$$

donde C es el costo anual del inventario, expresado en dólares, y q denota el número de bicicletas ordenadas cada vez que el minorista repone la oferta.

a) Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario.

b) ¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?

SOLUCIÓN

a) La primera derivada es

$$f'(q) = -4\,860q^{-2} + 15$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-4\,860q^{-2} + 15 = 0$$

cuando

$$\frac{-4\,860}{q^2} = -15$$

La multiplicación de ambos miembros por q^2 y su división entre -15 producen

$$\frac{4\,860}{15} = q^2$$

$$324 = q^2$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos lados, existen valores críticos en

$$\pm 18 = q$$

El valor $q = -18$ no tiene sentido en esta aplicación (las cantidades de pedidos negativas no son posibles). La naturaleza del único punto crítico significativo ($q = 18$) se verifica al obtener f'':

$$f''(q) = 9\,720q^{-3}$$
$$= \frac{9\,720}{q^3}$$

Al evaluar el valor crítico se obtiene

$$f''(18) = \frac{9\,720}{(18)^3}$$
$$= 1.667 > 0$$

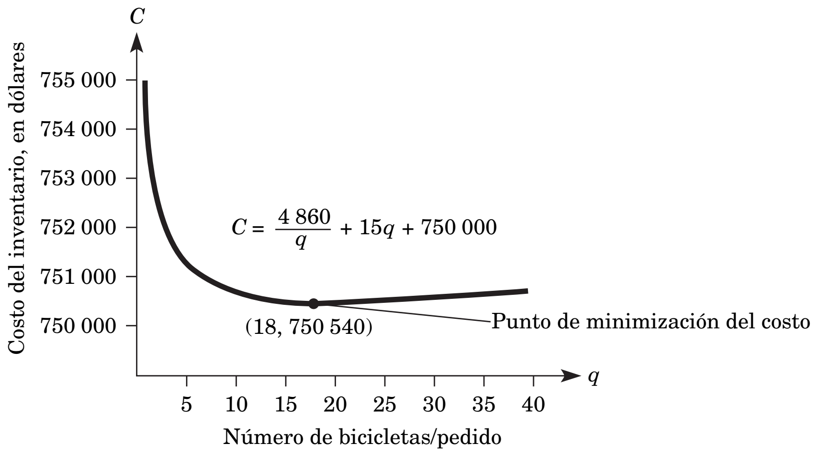

Figura 17.4 Función de costo del inventario.

Nótese que $f''(q) > 0$ para $q > 0$. Por consiguiente, la gráfica de f será cóncava hacia arriba en todas partes. De esta manera, el valor mínimo de f se presenta cuando $q = 18$. Los costos anuales del inventario se minimizarán cuando se pidan 18 bicicletas cada vez que el minorista reponga las existencias.

b) Los costos anuales mínimos del inventario se determinan calculando $f(18)$, o

$$f(18) = \frac{4\,860}{18} + 15(18) + 750\,000$$
$$= 270 + 270 + 750\,000 = \$750\,540$$

La figura 17.4 es una gráfica de la función del costo. (El minicaso al final del capítulo analiza suposiciones subyacentes a la función de costo del inventario en este ejemplo.)

Ejemplo 4

(Minimización del costo promedio por unidad) El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe mediante la función

$$C = 100\,000 + 1\,500q + 0.2q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares. Determine cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad.*

SOLUCIÓN

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas. Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de \$275, el costo promedio por unidad será \$275/10 = \$27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es

$$\overline{C} = f(q) = \frac{C}{q} = \frac{100\,000}{q} + 1\,500 + 0.2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es

$$f'(q) = -100\,000q^{-2} + 0.2$$

Si f' se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100\,000}{q^2}$$

o bien

$$q^2 = \frac{100\,000}{0.2} = 500\,000$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de

$$q = \pm 707.11 \text{ (unidades)}$$

El valor $q = -707.11$ no tiene sentido en esta aplicación, puesto que el nivel de producción, q, debe ser positivo.

La naturaleza del único punto crítico relevante se determina por la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200\,000q^{-3} = \frac{200\,000}{q^3}$$

$$f''(707.11) = \frac{200\,000}{(707.11)^3} = 0.00056 > 0$$

La segunda derivada $f''(p)$ es positiva para $q > 0$, lo que significa que la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $q > 0$. Por lo tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando $q = 707.11$. Este costo promedio mínimo por unidad es

$$f(707.11) = \frac{100\,000}{707.11} + 1\,500 + 0.2(707.11) = 141.42 + 1\,500 + 141.42 = \$1\,782.84$$

La figura 17.5 es una gráfica de la función de costo promedio.

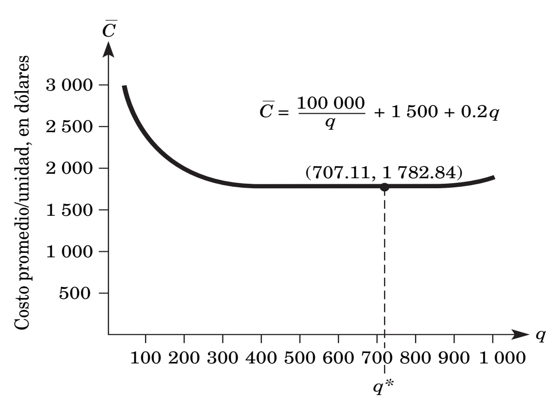

Figura 17.5 Función del costo promedio.

❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 4, ¿cuál es el costo total de fabricación en este nivel de producción? ¿Cuáles son las dos formas en que puede calcularse esta cifra? *Respuesta*: \$1 260 663.90.

Aplicaciones de la utilidad

Esta sección contiene dos ejemplos que se refieren a la maximización de utilidades.

Ejemplo 5

(Asignación de la fuerza de ventas) En el ejemplo 1 del capítulo 6 se explicó la *ley de rendimientos decrecientes* como un caso de una función no lineal. Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza, que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa), descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que la *utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes de ventas x asignados a ese distrito.* Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\,375x - 1\,500$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

SOLUCIÓN

a) La derivada de la función de utilidad es

$$f'(x) = -25x + 1\,375$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-25x = -1\,375$$

o bien, ocurre un valor crítico cuando

$$x = 55$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico, se obtiene

$$f''(x) = -25 \qquad \text{y} \qquad f''(55) = -25 < 0$$

Puesto que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en todas partes, el máximo valor de f se presenta cuando $x = 55$.
b) La utilidad máxima esperada es

$$\begin{aligned} f(55) &= -12.5(55)^2 + 1\,375(55) - 1\,500 \\ &= -37\,812.5 + 75\,625 - 1\,500 = 36\,312.5 \end{aligned}$$

Podemos concluir que la utilidad anual será maximizada en un valor de \$36 312.5 (cientos), es decir, \$3 631 250 si se asignan 55 representantes al distrito. La figura 17.6 ofrece una gráfica de la función de utilidad. ❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué representan en la figura 17.6 las intersecciones con el eje x? Interprete el significado de la intersección con el eje y. Analice la ley de rendimientos decrecientes en su aplicación a la forma de esta función de utilidad.

Ejemplo 6

(Energía solar) Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares colectores. Según los estudios de mercadotecnia que se han realizado, la demanda anual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda se ha estimado así:

$$q = 100\,000 - 200p \qquad \textbf{(17.1)}$$

donde q es el número de unidades demandadas al año y p representa el precio en dólares. Los estudios de ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está muy bien estimado por la función

$$C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2 \qquad \textbf{(17.2)}$$

Formule la función de utilidad $P = f(q)$ que exprese la utilidad anual P en función del número de unidades q que se producen y venden.

SOLUCIÓN

Se ha pedido desarrollar una función que exprese la utilidad P en términos de q. A diferencia del ejemplo 5, *hay que construir* la función de utilidad. La ecuación (17.2) es una función del costo total formulado en términos de q. No obstante, se necesita formular una función del ingreso total expresada en términos de q. La estructura básica para calcular el ingreso total es

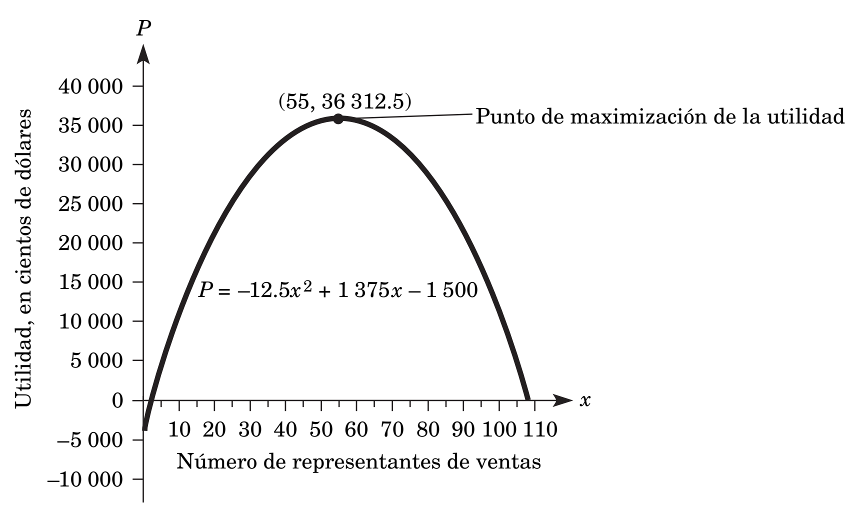

Figura 17.6 Función de la utilidad.

$$R = pq \tag{17.3}$$

Como se quiere que R se exprese en términos de q, se necesita reemplazar p en la ecuación (17.3) por una expresión equivalente que puede derivarse de la función de demanda. Al despejar p en la ecuación (17.1), se obtiene

$$200p = 100\,000 - q$$

o bien
$$p = 500 - 0.005q \tag{17.4}$$

Se puede sustituir el lado derecho de esta ecuación en la fórmula (17.3) para obtener la función de ingreso

$$\begin{aligned} R &= (500 - 0.005q)q \\ &= 500q - 0.005q^2 \end{aligned}$$

Ahora que las funciones de ingreso y de costo se han expresado en términos de q, es posible definir la función de utilidad como

$$\begin{aligned} P &= f(q) \\ &= R - C \\ &= 500q - 0.005q^2 - (150\,000 + 100q + 0.003q^2) \\ &= 500q - 0.005q^2 - 150\,000 - 100q - 0.003q^2 \end{aligned}$$

o bien
$$P = -0.008q^2 + 400q - 150\,000$$ ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 6 determine: *a*) el número de unidades q que deberían producirse para maximizar la utilidad anual; *b*) el precio que tendría que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta en el inciso *a*), y *c*) la máxima utilidad anual. *Respuesta*: *a*) $q = 25\,000$ unidades, *b*) $p = \$375$, *c*) \$4 850 000.

Ejemplo 7

(Dominio restringido) En el último ejemplo, suponga que la capacidad de producción anual del fabricante es de 20 000 unidades. Resuelva de nuevo el ejemplo 6 con esta restricción adicional.

SOLUCIÓN

Con nuestra restricción adicional, el dominio de la función está definido como $0 \leq q \leq 20\,000$. De acuerdo con la sección 16.4, recuérdese que deben compararse los valores de $f(q)$ en los puntos finales del dominio con los de $f(q^*)$ para cualquier valor q^*, donde $0 \leq q^* \leq 20\,000$.

El único punto crítico en la función de utilidades ocurre en $q = 25\,000$, que se encuentra fuera del dominio. Por ello, la utilidad será maximizada en uno de los puntos finales. Al evaluar $f(q)$ en ellos se obtiene

$$f(0) = -150\,000$$

y
$$\begin{aligned} f(20\,000) &= -0.008(20\,000)^2 + 400(20\,000) - 150\,000 \\ &= -3\,200\,000 + 8\,000\,000 - 150\,000 = 4\,650\,000 \end{aligned}$$

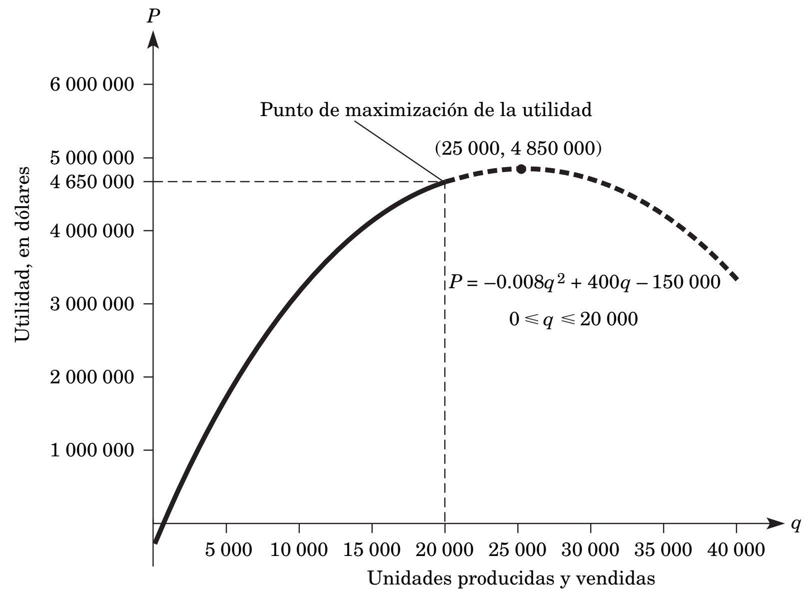

Figura 17.7 Función de utilidad/dominio restringido.

La utilidad se maximiza en un valor de \$4 650 000 cuando $q = 20\,000$ o cuando el fabricante opera a toda su capacidad.

El precio que debería fijarse se calcula sustituyendo $q = 20\,000$ en la ecuación (17.4), o

$$\begin{aligned} p &= 500 - 0.005(20\,000) \\ &= 500 - 100 = \$400 \end{aligned}$$

La figura 17.7 contiene una gráfica de la función de utilidad. ❑

Aproximación marginal para la maximización de la utilidad

Otro método para calcular el punto de maximización de la utilidad es el ***análisis marginal***. Este método, que goza de gran aceptación entre los economistas, examina los *efectos incrementales* en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende *una* unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades, es preciso que se cumplan las siguientes condiciones.

Condiciones para usar la aproximación marginal

I *Deberá ser posible identificar por separado las funciones del ingreso total y del costo total.*

II *Las funciones del ingreso y costo habrán de formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.*

Ingreso marginal. Uno de los dos conceptos más importantes del análisis marginal es el del ingreso marginal. *El **ingreso marginal** es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.* Si cada unidad de un producto se vende al mismo precio, el ingreso marginal será siempre igual al precio. Por ejemplo, la función lineal de ingreso

$$R = 10q$$

representa una situación donde cada unidad se vende a \$10. El ingreso marginal logrado con la venta de una unidad más es de \$10 en cualquier nivel de producción q.

En el ejemplo 6, una función de demanda para los paneles solares se estableció así

$$q = 100\,000 - 200p$$

A partir de esta función de demanda se formuló la función no lineal de ingreso total

$$R = f_1(q) = 500q - 0.005q^2 \tag{17.5}$$

El ingreso marginal en este ejemplo no es constante. Esto se mostró al calcular el ingreso total para distintos niveles de producción. La tabla 17.1 contiene estos cálculos para algunos valores de q. La tercera columna representa el ingreso marginal asociado al paso de un nivel de producción a otro. Nótese que, si bien las diferencias son ligeras, los valores del ingreso marginal están cambiando en cada nivel diferente de producción.

Tabla 17.1

Cálculo del ingreso marginal

Nivel producción q	**Ingreso total $f_1(q)$**	**Ingreso marginal $\Delta R = f_1(q) - f_1(q-1)$**
100	\$49 950.00	
101	\$50 448.995	\$498.995
102	\$50 947.98	\$498.985
103	\$51 446.955	\$498.975

Para una función del ingreso total $R(q)$, la derivada $R'(q)$ representa la razón de cambio instantánea en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. R' también representa una expresión general de la pendiente de la gráfica de la función del ingreso total. En el análisis marginal, la derivada se emplea para representar el ingreso marginal, es decir,

$$\boxed{MR = R'(q)} \tag{17.6}$$

La derivada, según se explicó en el capítulo 15, ofrece una aproximación a los cambios reales que se dan en el valor de una función. Por lo tanto, R' puede emplearse para aproximar el ingreso marginal obtenido con la venta de la siguiente unidad. Si se calcula R' para la función del ingreso en la ecuación (17.5),

$$R'(q) = 500 - 0.010q$$

Para aproximar el ingreso marginal logrado con la venta de la unidad 101, se evalúa R' cuando $q = 100$, o

$$\begin{aligned} R'(100) &= 500 - 0.010(100) \\ &= 500 - 1 = 499 \end{aligned}$$

Ésta es una aproximación muy cercana al valor real ($498.995) del ingreso marginal que aparece en la tabla 17.1.

Costo marginal. El otro concepto central del análisis marginal lo constituye el costo marginal. *El* ***costo marginal*** *es el costo adicional en que se incurre al producir y vender una unidad de un producto o servicio.* Las funciones lineales del costo suponen que el costo variable por unidad sea constante; en ellas, el costo marginal es el mismo en cualquier nivel de producción. Un ejemplo de ello es la función de costo

$$C = 150\,000 + 3.5q$$

donde el costo variable por unidad es $3.50. El costo marginal para esta función de costo es siempre $3.50.

Una función no lineal de costo es caracterizada por costos marginales variables. Esto se ejemplifica en la función de costo

$$C = f_2(q) = 150\,000 + 100q + 0.003q^2 \qquad \textbf{(17.7)}$$

que se utilizó en el ejemplo 6. Puede mostrarse que los costos marginales realmente fluctúan en distintos niveles de producción si se calculan los valores de esos costos para algunos valores de q. Este cálculo se da en la tabla 17.2.

En una función de costo total $C(q)$, la derivada $C'(q)$ representa la razón de cambio instantánea del costo total suponiendo que haya un cambio en el número de unidades producidas. $C'(q)$ representa además una expresión general para la pendiente de la gráfica de la función del costo total. En el análisis marginal, la derivada se usa para representar el costo marginal, o

$$\boxed{MC = C'(q)} \qquad \textbf{(17.8)}$$

Tabla 17.2 **Cálculo del costo marginal**

Nivel de producción q	Ingreso total $f_2(q)$	Ingreso marginal $\Delta C = f_2(q) - f_2(q-1)$
100	$160 030.00	
101	$160 130.603	$100.603
102	$160 231.212	$100.609
103	$160 331.827	$100.615

Como en el caso de R', C' puede emplearse para aproximar el costo marginal asociado a la producción de la siguiente unidad. La derivada de la función de costo en la ecuación (17.7) es

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Para aproximar el costo marginal debido a la producción de la unidad 101, se evalúa C' en $q = 100$, o

$$\begin{aligned} C'(100) &= 100 + 0.006(100) \\ &= \$100.60 \end{aligned}$$

Si se compara este valor con el valor real (\$100.603) en la tabla 17.2, se advierte que ambos están muy cercanos entre sí.

Análisis de la utilidad marginal. Como se indicó antes, este análisis se ocupa del efecto que se opera en las utilidades si se produce y vende una unidad adicional. Cuanto el ingreso adicional conseguido con la venta de la siguiente unidad sea mayor que el costo de producirla y venderla, habrá una utilidad neta con su producción y venta, aumentando también la utilidad total. Pero si es menor que el costo de producir y vender la unidad adicional, habrá una pérdida neta en esa unidad y disminuirá la utilidad total. A continuación se da una regla práctica para saber si debe o no producirse una unidad adicional (suponiendo que la utilidad sea de gran importancia).

Regla práctica: ¿Debería producirse una unidad adicional?

I *Si $MR > MC$, se producirá la siguiente unidad.*

II *Si $MR < MC$, no se producirá la siguiente unidad.*

En muchas situaciones de producción, el ingreso marginal rebasa al costo marginal en niveles más bajos de producción. A medida que aumenta el nivel de producción (cantidad producida), disminuye la cantidad en que el ingreso marginal excede al costo marginal. Con el tiempo se llega a un nivel en que $MR = MC$. Más allá de este punto $MR < MC$, y la utilidad total empieza a disminuir al incrementarse la producción. Así, si puede identificarse el punto donde $MR = MC$ para la última unidad producida y vendida, la utilidad total será maximizada. Este nivel de producción que maximiza la utilidad puede identificarse mediante la siguiente condición.

Criterio de maximización de la utilidad

Se producirá hasta alcanzar el nivel de producción en que

$$MR = MC \tag{17.9}$$

Expresado en términos de las derivadas, este criterio recomienda producir hasta el punto donde

$$\boxed{R'(q) = C'(q)} \tag{17.10}$$

Esta ecuación es resultado natural de hallar el punto donde la función de utilidad es maximizada, es decir, establecer la derivada de

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

igual a 0 y resolver para q.

$$P'(q) = R'(q) - C'(q)$$

y

$$P'(q) = 0$$

cuando

$$R'(q) - C'(q) = 0$$

o bien

$$R'(q) = C'(q)$$

Sea q^* un valor donde $R'(q) = C'(q)$. La segunda derivada de P es $P''(q) = R''(q) - C''(q)$. Por la prueba de la segunda derivada, la utilidad se maximizará en $q = q^*$ siempre que

$$P''(q^*) < 0$$

o

$$R''(q^*) - C''(q^*) < 0$$

o bien

$$R''(q^*) < C''(q^*)$$

Si $R''(q) < C''(q)$ para todos los valores de $q > 0$, entonces la utilidad tiene un valor máximo absoluto de $q = q^*$.

Condición suficiente para la maximización de la utilidad

Si se tiene un nivel de producción q^* en que $R'(q) = C'(q)$ (o $MR = MC$), la producción de q^* dará por resultado la maximización de la utilidad si

$$R''(q^*) < C''(q^*) \tag{17.11}$$

Ejemplo 8 Resuelva de nuevo el ejemplo 6 haciendo uso de la aproximación marginal.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 6

$$R = 500q - 0.005q^2$$

y

$$C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2$$

Debido a que las funciones de ingreso y costo son distintas y ambas se expresan en términos del nivel de producción q, las dos condiciones para efectuar el análisis marginal quedan satisfechas. Ya se ha determinado que

$$R'(q) = 500 - 0.01q$$

y $$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Por lo tanto, $$R'(q) = C'(q)$$

cuando $$500 - 0.01q = 100 + 0.006q$$

$$-0.016q = -400$$

o $$q^* = 25\,000$$

Puesto que $$R''(q^*) = -0.01 \quad \text{y} \quad C''(q^*) = 0.006$$

$$R''(q^*) < C''(q^*)$$

o bien $$-0.01 < 0.006$$

y se tiene un máximo relativo en la función de utilidad cuando $q = 25\,000$. La figura 17.8 presenta las gráficas de $R(q)$ y $C(q)$.

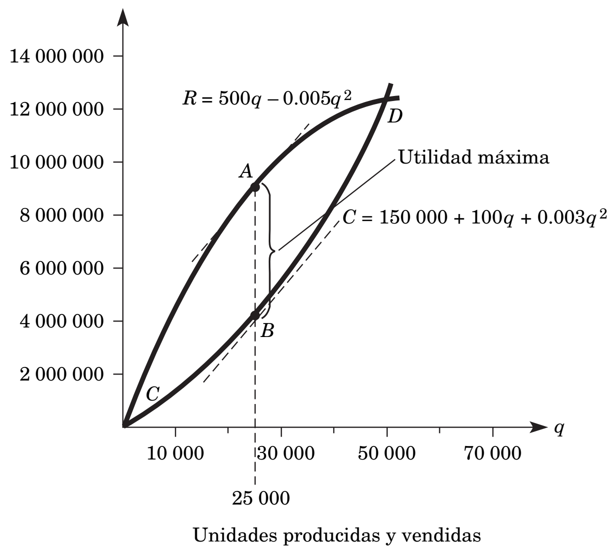

Figura 17.8 Análisis marginal: maximización de la utilidad.

Hagamos una pausa para examinar detenidamente la figura 17.8. Vale la pena hacer las siguientes observaciones:

1. *Los puntos C y D representan los puntos donde se intersecan las funciones de ingreso y de costo. Estas últimas representan puntos de equilibrio.*
2. *Entre los puntos C y D, la función de ingreso se halla arriba de la de costo, lo cual indica que el ingreso total es mayor que el costo total y que se lograrán utilidades dentro de este intervalo. Para los niveles de producción a la derecha de D, la función de costo se halla arriba de la de ingresos, lo cual indica que el costo total es mayor que el ingreso total, resultando de ello una utilidad negativa (pérdida).*

3. *La distancia vertical que separa las gráficas de las dos funciones representa la utilidad o pérdida, según el nivel de la producción.*
4. *En el intervalo $0 \leq q \leq 25\ 000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva y mayor que la pendiente de la función de costo. Expresado en términos de MR y MC, $MR > MC$ en este intervalo.*
5. *Por otra parte, en el intervalo $0 \leq q \leq 25\ 000$ la distancia vertical entre las dos curvas aumenta y esto indica que la utilidad está aumentando en el intervalo.*
6. *En $q = 25\ 000$ las pendientes en los puntos A y B son iguales, lo cual indica que $MR = MC$. Asimismo, en $q = 25\ 000$, la distancia vertical que separa las dos curvas es mayor que en cualquier otro punto de la región de utilidades; por lo tanto, éste es el punto de la maximización de utilidades.*
7. *Para $q > 25\ 000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva pero es menos positiva para la función de costo. Así pues, $MR < MC$ y disminuye para cada utilidad adicional por unidad, lo cual ocasiona una pérdida más allá del punto D.*

Ejemplo 9

En el ejemplo 5 se pidió determinar el número de representantes de ventas x que producirían una utilidad máxima P en una empresa de cosméticos y artículos de belleza. La función de utilidades se formuló así

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\ 375x - 1\ 500$$

Con el método del análisis marginal, determine el número de representantes que producirían la utilidad máxima para la empresa.

SOLUCIÓN

No es posible aplicar el método del análisis marginal en este ejemplo porque no pueden identificarse las funciones de ingreso y costo totales que se combinaron para formar la función de utilidad. No se satisfizo la condición 1 del empleo del análisis marginal.

Ejemplo 10

La figura 17.9 muestra una gráfica de la función lineal de ingreso y de la función no lineal de costo. A la izquierda de q^*, la pendiente de la función de ingreso excede a la de la función de costo, lo cual indica que $MR > MC$.

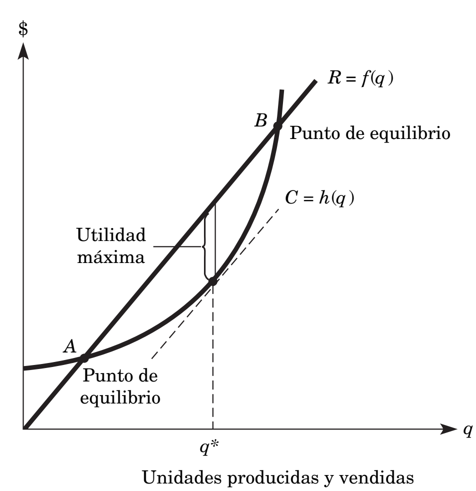

Figura 17.9 Funciones del ingreso lineal y del costo cuadrático.

En q^* las pendientes de ambas funciones son iguales. La distancia vertical que las separa es mayor en q^* que en cualquiera otro valor de q entre los puntos A y B. Estos dos son los puntos de equilibrio. ❑

Sección 17.1 Ejercicios de seguimiento

1. Una compañía ha descubierto que el ingreso total es una función del precio fijado a su producto. En concreto, la función del ingreso total es

$$R = f(p) = -10p^2 + 1\,750p$$

donde p es el precio en dólares.

a) Determine el precio p que produce el máximo ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

2. La función de demanda del producto de una firma es

$$q = 150\,000 - 75p$$

donde q representa el número de unidades demandadas y p indica su precio en dólares.

a) Determine el precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

c) ¿Cuántas unidades se espera que se demanden?

3. La utilidad anual de una compañía depende del número de unidades producidas. Específicamente, la función que describe la relación existente entre la utilidad P (expresada en dólares) y el número de unidades producidas x es

$$P = -0.01x^2 + 5\,000x - 25\,000$$

a) Determine el número de unidades x que producirán la utilidad máxima.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

4. Administración de playas Una comunidad, situada en una zona vacacional, está tratando de escoger una tarifa de estacionamiento que fijará a la playa del pueblo. En la zona hay otras playas, y todas ellas compiten por atraer a los bañistas. El municipio ha optado por la siguiente función que expresa el número promedio de automóviles por día q en términos de la tarifa de estacionamiento p expresada en centavos.

$$q = 6\,000 - 12p$$

a) Determine la tarifa que debería cargarse para maximizar los ingresos diarios de la playa.

b) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso diario de la playa?

c) ¿Cuántos automóviles se esperan en un día promedio?

5. Administración del impuesto de importación El gobierno estadounidense está estudiando la estructura de los impuestos de importación para los televisores de color traídos de otros países. El gobierno está tratando de determinar el impuesto que impondrá a cada aparato. Sabe bien que ese impuesto repercutirá en la demanda de los televisores importados. Estima que la demanda

D, medida en cientos de televisores, guarda relación con el impuesto de importación t, medido en centavos, de acuerdo con la función

$$D = 80\,000 - 12.5t$$

a) Determine el impuesto de importación que produce los máximos ingresos fiscales en la importación de los televisores.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo?
c) ¿Cuál será la demanda de los televisores importados de color con este impuesto?

6. Un fabricante ha calculado una función de costo que expresa el costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de sus materias primas en términos del tamaño de cada pedido. La función de costo es

$$C = \frac{51\,200}{q} + 80q + 750\,000$$

donde q es el tamaño de cada pedido (en toneladas) y C el costo anual del inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se esperan que sean los mínimos costos del inventario?

7. En el ejercicio 6, suponga que la cantidad máxima de materias primas que puede aceptarse en un embarque cualquiera es de 20 toneladas.
a) Con esta restricción, determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles son los mínimos costos anuales del inventario?
c) ¿Qué relación tienen estos resultados con los del ejercicio 6?

8. Un gran distribuidor de pelotas de tenis está prosperando mucho. Uno de los principales problemas del distribuidor es mantener el ritmo de demanda de las pelotas de tenis. Las compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de las pelotas de tenis se describe mediante la función

$$C = \frac{280\,000}{q} + 0.15q + 2\,000\,000$$

donde q es el tamaño de pedido (en docenas de pelotas de tenis) y C indica el costo anual del inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se espera que sean los costos mínimos del inventario?

9. El distribuidor del ejercicio 8 cuenta con instalaciones de almacenamiento para recibir un máximo de 1 200 docenas de pelotas en cada embarque.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice los costos anuales del inventario.
b) ¿Cuáles son los costos mínimos del inventario?
c) ¿Qué relación guardan estos resultados con los obtenidos en el ejercicio 8?

10. El costo total de producir q unidades de cierto producto se describe mediante la función

$$C = 5\,000\,000 + 250q + 0.002q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) ¿Cuántas unidades deberán producirse a fin de minimizar el costo promedio por unidad?
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

11. El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 350\,000 + 7\,500q + 0.25q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de minimizar el *costo promedio por unidad*.
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

12. Resuelva de nuevo el ejercicio 11 si la capacidad máxima de producción es de 1 000 unidades.

13. **Servicios públicos** Una compañía de televisión por cable ha averiguado que su rentabilidad depende de la tarifa mensual que cobra a sus clientes. Específicamente, la relación que describe la utilidad anual P (en dólares) en función de la tarifa mensual de renta r (en dólares) es la siguiente

$$P = -50\,000r^2 + 2\,750\,000r - 5\,000\,000$$

a) Determine la tarifa de renta mensual r que dé por resultado la utilidad máxima.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

14. En el ejercicio 13 suponga que la comisión local de servicios públicos ha impuesto a la compañía de televisión por cable la obligación de no cobrar una tarifa mayor que $20.

a) ¿Cuál tarifa produce la utilidad máxima a la compañía?
b) ¿Cuál es el efecto que la decisión de la comisión tiene en la rentabilidad de la empresa?

15. Una compañía estima que la demanda de su producto fluctúa con su precio. La función de la demanda es

$$q = 280\,000 - 400p$$

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en dólares. El costo total de producir q unidades se estima con la función

$$C = 350\,000 + 300q + 0.0015q^2$$

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de maximizar la utilidad anual.
b) ¿Qué precio debería fijarse?
c) ¿Cuál se espera que sea la utilidad anual?

16. Resuelva el ejercicio anterior, usando la aproximación marginal para maximizar las utilidades.

17. Si en el ejercicio 15 la capacidad anual es de 40 000 unidades, ¿cuántas unidades q darán por resultado la utilidad máxima? ¿Cuál es la pérdida en la utilidad atribuida a la capacidad restrictiva?

18. Una manera equivalente de resolver el ejemplo 2 consiste en expresar el ingreso total en función de q, el número promedio de pasajeros por hora. Formule la función $R = g(q)$ y determine el número de pasajeros q que produzca el máximo ingreso total. Verifique que tanto el valor máximo de R como el precio que debería fijarse sean los mismos que los que se obtuvieron en el ejemplo 2.

19. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 500 + 100q + 0.5q^2$$
$$R(q) = 500q$$

a) Mediante la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

20. Una empresa vende cada unidad de un producto en \$50. El costo total de producir x (mil) unidades se describe mediante la función

$$C(x) = 10 - 2.5x^2 + x^3$$

donde $C(x)$ se mide en miles de dólares.
a) Utilice la aproximación marginal para determinar el nivel de producción que maximice las utilidades.
b) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción? ¿El costo total? ¿Las utilidades totales?

21. La función de utilidad de una firma es

$$P(q) = -4.5q^2 + 36\,000q - 45\,000$$

a) Con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

22. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 5\,000\,000 + 250q + 0.002q^2$$
$$R(q) = 1\,250q - 0.005q^2$$

a) Mediante la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

23. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 40\,000 + 25q + 0.002q^2$$
$$R(q) = 75q - 0.008q^2$$

a) Con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

24. En la figura 17.10 se describe una función de costo total $C(q)$ y una de ingreso total $R(q)$. Explique la importancia económica de los cuatro niveles de producción q_1, q_2, q_3 y q_4.

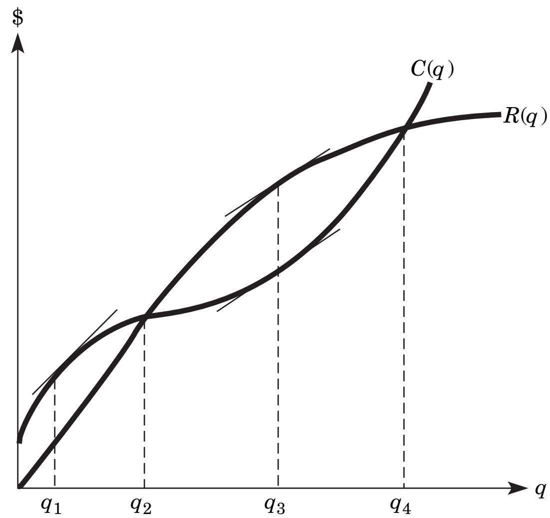

Figura 17.10

17.2 Aplicaciones adicionales

Los siguientes ejemplos constituyen aplicaciones adicionales de los procedimientos de optimización.

Ejemplo 11

(Bienes raíces) A un gran conglomerado multinacional le interesa comprar terrenos de primera calidad y provistos de muelles o paseos de entablado en uno de los principales lugares de veraneo en el océano. El conglomerado desea adquirir un lote rectangular situado en ese lugar. La única restricción es que tenga una superficie de 100 000 pies cuadrados. La figura 17.11 ofrece un diagrama del terreno: la *x* es el frente del paseo de entablado y la *y* indica el fondo del lote (medidos ambos en pies).

El dueño de la propiedad ha fijado a los lotes un precio de \$5 000 por pie de frente a lo largo del paseo de entablado y de \$2 000 por pie de fondo a partir del paseo. El conglomerado desea determinar las dimensiones del lote que minimicen el costo total de compra.

Consulte la figura 17.11. El costo total de compra de un lote que tenga las dimensiones de *x* pies por *y* pies es

$$C = 5\,000x + 2\,000y \tag{17.12}$$

donde C es el costo en dólares.

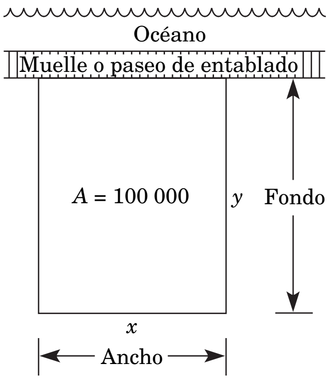

Figura 17.11

El problema radica en determinar los valores de x y y que minimicen C. Sin embargo, C se expresa en función de dos variables, y todavía no podemos manejar las funciones que consten de dos variables independientes.

El conglomerado ha estipulado que la superficie del lote debe ser de 100 000 pies cuadrados, de manera que la relación existente entre x y y es

$$xy = 100\,000 \tag{17.13}$$

Conocida esta relación, puede despejarse una de las variables en términos de la otra. Por ejemplo,

$$y = \frac{100\,000}{x} \tag{17.14}$$

Puede sustituirse el miembro derecho de esta ecuación en la función de costo siempre que aparezca la variable y, o

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= 5\,000x + 2\,000\,\frac{100\,000}{x} \\ &= 5\,000x + \frac{200\,000\,000}{x} \end{aligned} \tag{17.15}$$

La ecuación (17.15) es una repetición de la ecuación (17.12) únicamente en términos de una variable independiente. Ahora podemos buscar el valor de x que minimiza el costo de compra C.

La primera derivada es

$$C'(x) = 5\,000 - 200\,000\,000x^{-2}$$

Si C' se hace igual a 0,

$$5\,000 = \frac{200\,000\,000}{x^2}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{200\,000\,000}{5\,000} \\ &= 40\,000 \end{aligned}$$

o bien los valores críticos se presentan en

$$x = \pm 200$$

El punto crítico en $x = -200$ carece de sentido. Para probar $x = 200$,

$$C''(x) = 400\,000\,000x^{-3}$$
$$= \frac{400\,000\,000}{x^3}$$
$$C''(200) = \frac{400\,000\,000}{(200)^3}$$
$$= \frac{400\,000\,000}{8\,000\,000} = 50 > 0$$

Puesto que $C''(x) > 0$ para $x > 0$, la gráfica de C será cóncava hacia arriba para $x > 0$. Así pues, el valor mínimo para C ocurre en $x = 200$.

Los costos totales se minimizarán cuando el ancho del lote sea de 200 pies. El fondo del mismo se obtendrá al sustituir $x = 200$ en la ecuación (17.14), esto es

$$y = \frac{100\,000}{200}$$
$$= 500$$

Si el lote es de 200 pies por 500 pies, el costo total será minimizado en un valor de

$$C = \$5\,000(200) + \$2\,000(500)$$
$$= \$2\,000\,000$$

Ejemplo 12 **(Respuesta a las emergencias: Modelo de ubicación)** En el ejemplo 13 del capítulo 6 se explicó un problema en el que tres ciudades de veraneo aceptaron construir y sostener un servicio de respuesta en casos de emergencia, donde residirían los paramédicos y se guardarían los camiones de rescate. La cuestión clave que se analizó fue la ubicación del servicio. El criterio seleccionado fue escoger la ubicación de manera que minimizara S, o sea la suma de los productos de las poblaciones veraniegas de cada pueblo y el cuadrado de la distancia entre el pueblo y el servicio. La figura 17.12 muestra las localizaciones relativas de las tres ciudades.

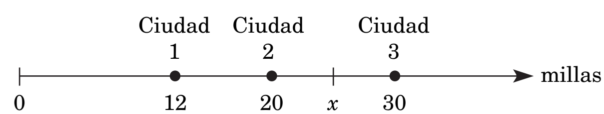

Figura 17.12

Se determinó que la función de criterio que debía ser minimizada era

$$S = f(x) = 450x^2 - 19\,600x + 241\,600$$

donde x es la ubicación del servicio en relación con el punto cero de la figura 17.12. (Quizás el lector quiera volver a leer el ejemplo 13 de la página 244.) Si se conoce la función de criterio, la primera derivada será

$$f'(x) = 900x - 19\,600$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$900x = 19\,600$$

y un valor crítico ocurre en

$$x = 21.77$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico se obtiene

$$f''(x) = 900 \text{ para } x > 0$$

En particular,

$$f''(21.77) = 900 > 0$$

Así pues, f se minimiza cuando $x = 21.77$. El criterio S se minimiza en $x = 21.77$, y el servicio deberá localizarse como se indica en la figura 17.13.

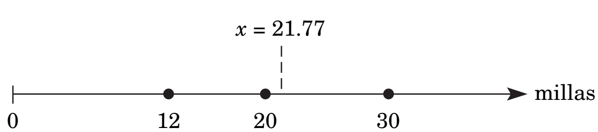

Figura 17.13

Ejemplo 13

(Sustitución de equipo) Una decisión que afrontan muchas organizaciones es determinar el momento óptimo para reemplazar equipo muy importante. Los equipos principales se caracterizan a menudo por dos componentes de costos: *costo de capital* y *costo de operación.* El ***costo de capital*** es el costo de compra menos su valor de salvamento. Si una máquina cuesta \$ 10 000 y luego se vende en \$2 000, el costo de capital es de \$8 000. El ***costo de operación*** comprende los gastos de poseer y mantener un equipo. La gasolina, el aceite, los seguros y la reparación son costos asociados a la posesión y operación de un vehículo y pueden considerarse como costos de operación.

Algunas organizaciones se concentran en el *costo promedio de capital* y en el *costo promedio de operación* cuando determinan el momento de sustituir un equipo. Esos costos tienden a compensarse mutuamente. Esto es, cuando uno aumenta el otro disminuye. El costo promedio de capital de un equipo tiende a disminuir con el tiempo. En el caso de un automóvil nuevo cuyo valor decrece de \$12 000 a \$9 000 en el primer año, el costo promedio de capital por año es de \$3 000. Si el valor del automóvil disminuye en \$2 000 al cabo de cinco años, el costo promedio de capital será

$$\frac{\$12\,000 - \$2\,000}{5} = \frac{\$10\,000}{5} = \$2\,000 \text{ por año}$$

El costo promedio de operación tiende a incrementarse con el tiempo, a medida que el equipo pierde eficiencia y se requiere más mantenimiento. Por ejemplo, el costo promedio anual de operación de un automóvil tiende a elevarse a medida que el automóvil envejece.

Una compañía de taxis de una gran ciudad quiere determinar cuánto tiempo debería conservar sus taxis. Cada taxi viene totalmente equipado a un precio de \$18 000. La compañía estima que el costo promedio de capital y el costo promedio de operación son una función de x, o sea el número de millas que recorre cada unidad. El valor de recuperación (salvamento) del automóvil, en dólares, se expresa mediante la función

$$S(x) = 16\,000 - 0.10x$$

Ello significa que el automóvil disminuye su valor en \$2 000 tan pronto empieza a ser conducido y que luego su valor decae a una tasa de \$0.10 por milla.

El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima mediante la función

$$O(x) = 0.0000003x + 0.15$$

Determine el número de millas que el automóvil debería recorrer antes de ser reemplazado, si el objetivo es minimizar la *suma* de los costos promedio de capital y de operación.

SOLUCIÓN

El costo promedio de capital por milla es igual al costo de compra menos el valor de recuperación, todo ello dividido entre el número de millas recorridas, esto es,

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{18\,000 - (16\,000 - 0.10x)}{x} \\ &= \frac{2\,000 + 0.10x}{x} \\ &= \frac{2\,000}{x} + 0.10 \end{aligned}$$

La suma de los costos promedio de capital y de operación promedio es

$$\begin{aligned} f(x) &= O(x) + C(x) \\ &= 0.0000003x + 0.15 + \frac{2\,000}{x} + 0.10 \\ &= 0.0000003x + 0.25 + \frac{2\,000}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0.0000003 - 2\,000x^{-2}$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$0.0000003 = \frac{2\,000}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{2\,000}{0.0000003}$$

$$= 6\,666\,666\,666.67$$

o un valor crítico ocurre cuando $$x = \pm 81\,649.6$$

De nueva cuenta, un valor negativo para x no tiene sentido. Al comprobar el valor crítico $x = 81\,649.6$, se obtiene

$$f''(x) = 4\,000x^{-3}$$

$$= \frac{4\,000}{x^3}$$

Para $x > 0$, $f''(x) > 0$ (es decir, la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $x > 0$). Por consiguiente f es minimizada cuando $x = 81\,649.6$,

$$f(81\,649.6) = 0.0000003(81\,649.6) + 0.25 + \frac{2\,000}{81\,649.6}$$

$$= 0.02450 + 0.25 + 0.02450 = 0.299$$

Los costos promedio de capital y de operación se minimizan a un valor de \$0.299 por milla cuando un taxi recorre 81 649.6 millas. Los costos totales de capital y de operación serán iguales a (costo/milla) · (número de millas), o

$$(\$0.299)(81\,649.6) = \$24\,413.23$$

La figura 17.14 ilustra las funciones de los dos costos componentes, así como la función del costo total. Adviértase que el costo promedio de operación por milla $O(x)$ aumenta al elevarse los valores de x, y que el costo promedio de capital por milla $C(x)$ disminuye con los valores crecientes de x.

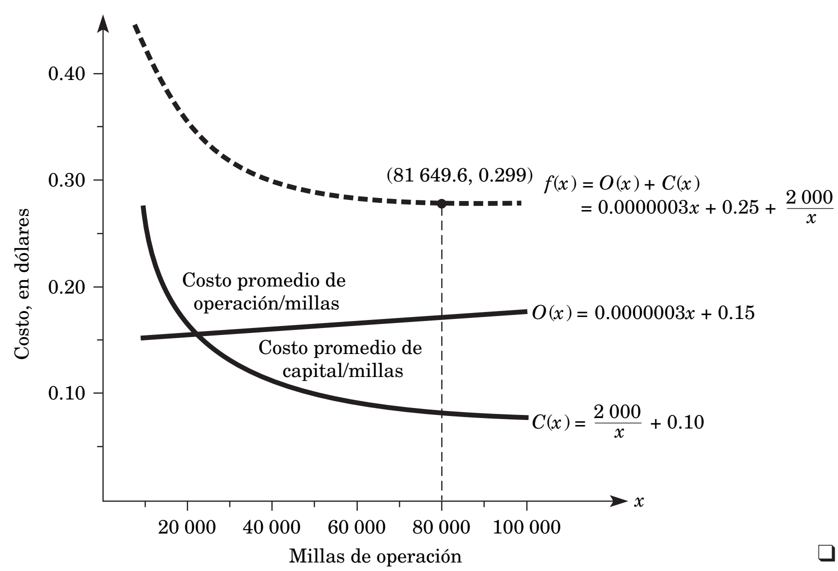

Figura 17.14

❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

Dado que el lector entiende de decisiones acerca de cuándo reemplazar equipos, haga la crítica de las suposiciones empleadas en este modelo. ¿Qué factores o consideraciones relevantes no se explicaron cuando se utilizaron los resultados de este modelo?

Ejemplo 14 **(Cobranza de cuentas)** En el ejemplo 11 del capítulo 7 se analizó el cobro de cuentas por créditos proporcionados a las personas que utilizan una tarjeta de crédito de renombre. La institución financiera determinó que el porcentaje de cuentas por cobrar P (en dólares) que se recaudan t meses después que el crédito fue otorgado es

$$P = 0.95(1 - e^{-0.7t})$$

El crédito promedio autorizado en un mes cualquiera es de \$100 millones. La institución financiera estima que *para cada \$100 millones en nuevos créditos* autorizados cada mes, los esfuerzos de cobro tienen un costo de \$1 millón por mes. Es decir, si se autoriza un crédito de \$100 millones el día de hoy, costarán \$1 millón al mes los intentos de la institución por cobrar estas cuentas. Determine el número de meses que debería continuar el esfuerzo de cobranza si el objetivo es maximizar las cobranzas netas N (dólares cobrados menos los costos de cobranza).

SOLUCIÓN

Dado que se otorgan \$100 millones de crédito, la cantidad de cobranzas recaudadas (en millones de dólares) es igual a

$$(\text{Cantidad de crédito otorgado})\ (\text{Porcentaje de cuentas cobradas})$$

o

$$(100)(0.95)(1 - e^{-0.7t})$$

Por consiguiente, los cobros netos N se describen mediante la función

$$\text{Cobros netos} = \text{cantidad recaudada} - \text{costos de cobranza}$$

o bien

$$\begin{aligned} N &= f(t) \\ &= (100)(0.95)(1 - e^{-0.7t}) - (1)t \\ &= 95(1 - e^{-0.7t}) - t \\ &= 95 - 95e^{-0.7t} - t \end{aligned}$$

donde t es igual al número de meses durante los cuales se llevan a cabo los esfuerzos de recaudación o cobranza. La primera derivada es

$$f'(t) = 66.5e^{-0.7t} - 1$$

Si se hace $f' = 0$,

$$\begin{aligned} 66.5e^{-0.7t} &= 1 \\ e^{-0.7t} &= 0.01503 \end{aligned}$$

De la tabla 1,

$$e^{-4.2} = 0.0150$$

De este modo, $e^{-0.7t} = 0.01503$ cuando

$$-0.7t = -4.2$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$t = 6$$

El único punto crítico en f ocurre cuando $t = 6$. Ya que $f''(t) = -46.55e^{-0.7t} < 0$ para toda $t > 0$, $f''(6) < 0$ y f es maximizada en $t = 6$. Las cobranzas netas máximas son

$$\begin{aligned} f(6) &= 95 - 95e^{-0.7(6)} - 6 \\ &= 95 - 95(0.0150) - 6 = 95 - 1.425 - 6 = 87.575 \end{aligned}$$

o bien, \$87.575 millones.

Para cada \$100 millones de crédito otorgados, las cobranzas netas se maximizarán a un valor de \$87.575 millones si los esfuerzos de recaudación continúan por seis meses. ❑

Ejercicio de práctica

a) Verifique que el punto crítico en $t = 6$ sea un máximo relativo.
b) ¿Cuál es la cantidad total (bruta) recolectada durante el periodo de seis meses?
Respuesta: b) \$93.575 millones.

Ejemplo 15

(Administración del bienestar) Una agencia de bienestar recientemente creada intenta determinar el número de analistas por contratar para procesar solicitudes de bienestar. Los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función de costo es

$$C = f(x) = 0.001x^2 - 5 \ln x + 60$$

Determine el número de analistas que deberían contratarse para minimizar el costo promedio por solicitud.

SOLUCIÓN

La derivada de f es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.002x - 5\frac{1}{x} \\ &= 0.002x - \frac{5}{x} \end{aligned}$$

Si se hace $f' = 0$,

$$\begin{aligned} 0.002x &= \frac{5}{x} \\ 0.002x^2 &= 5 \\ x^2 &= \frac{5}{0.002} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$x = 50$$

(La raíz $x = -50$ no tiene sentido.)

El valor de $f(x)$ en el punto crítico es

$$\begin{aligned} f(50) &= 0.001(50)^2 - 5 \ln 50 + 60 \\ &= 0.001(2\,500) - 5(3.912) + 60 = 2.5 - 19.56 + 60 = \$42.94 \end{aligned}$$

Para verificar la naturaleza del punto crítico,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0.002 + 5x^{-2} \\ &= 0.002 + \frac{5}{x^2} > 0 \text{ para } x > 0 \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} f''(50) &= 0.002 + \frac{5}{(50)^2} \\ &= 0.002 + \frac{5}{2\,500} = 0.002 + 0.002 = 0.004 > 0 \end{aligned}$$

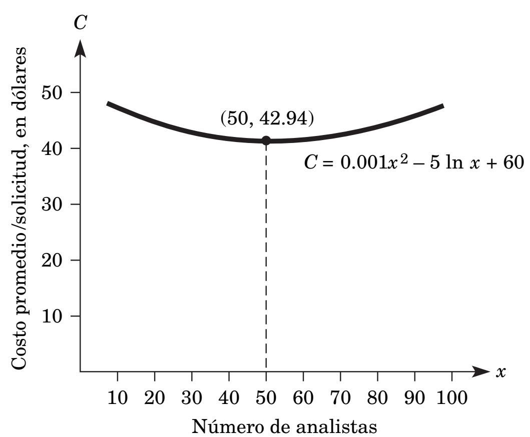

Figura 17.15

Por lo tanto, f se minimiza cuando $x = 50$. El costo de procesamiento promedio por solicitud se minimiza a un valor de \$42.94 cuando se contratan 50 analistas. La figura 17.15 ilustra una gráfica de la función promedio de costo.

Ejemplo 16

(Planeación de la compensación) El fabricante de un producto perecedero ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones de carga. Una entrega normal tarda un promedio de 20 horas. A los conductores se les paga una tarifa de \$10 por hora hasta un *máximo* de 20 horas. Si el viaje tarda más de 20 horas, los conductores reciben una remuneración de apenas 20 horas. Se les da un incentivo por hacer el viaje en menos (pero no mucho menos) de 20 horas. Por cada hora por debajo de las 20, el sueldo por hora aumenta en \$1.

a) Determine la función $w = f(x)$ cuando w es igual al sueldo por hora en dólares y x indica el número de horas requeridas para realizar el viaje.

b) ¿Qué tiempo de viaje x maximizará el sueldo del conductor por viaje?

c) ¿Cuál es el sueldo por hora relacionado con este tiempo de viaje?

d) ¿Cuál es el sueldo máximo?

e) ¿Qué relación guarda este salario con el recibido por un viaje de 20 horas?

SOLUCIÓN

a) La función del sueldo por hora debe expresarse en dos partes.

$$\text{Salario por hora} = \begin{cases} \$10 + \$1 \times \text{(el número de horas es menor que 20)} \\ \qquad\qquad\qquad \text{(cuando el tiempo del viaje es menor que 20 horas)} \\ \$10 \qquad\qquad\quad \text{(cuando el tiempo del viaje es de 20 horas o más)} \end{cases}$$

Si se conocen las definiciones de las variables de x y w, esta función puede reformularse así

$$w = f(x) = \begin{cases} 10 + 1(20 - x) & 0 \le x < 20 \qquad \textbf{(17.16a)} \\ 10 & x \ge 20 \qquad \textbf{(17.16b)} \end{cases}$$

b) El sueldo de un conductor S por viaje será de \$10/hora × 20 horas = \$200, si el tiempo del viaje es mayor o igual a 20 horas. En caso de que sea menor de 20 horas,

$$\begin{aligned} S &= g(x) \\ &= wx \\ &= [10 + 1(20 - x)]x \\ &= (30 - x)x \\ &= 30x - x^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(17.17)}$$

Necesitamos comparar el salario de \$200 para $x \ge 20$ con el salario más alto para un tiempo de viaje de menos de 20 horas.

A fin de examinar g para un máximo relativo, se calcula la derivada

$$g'(x) = 30 - 2x$$

Haciendo g' igual a 0,

$$30 - 2x = 0$$
$$30 = 2x$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$15 = x$$

Para verificar el comportamiento de $g(x)$ cuando $x = 15$,

$$g''(x) = -2 \text{ para } 0 \leq x \leq 20$$

y
$$g''(15) = -2 < 0$$

En consecuencia, ocurre un valor máximo en g cuando $x = 15$ o cuando un viaje tarda 15 horas.

c) El sueldo por hora asociado a un viaje de 15 horas de duración es

$$\begin{aligned} w &= 10 + 1(20 - 15) \\ &= 10 + 5 = \$15 \end{aligned}$$

d) El sueldo del conductor relacionado con un viaje de 15 horas de duración se calcula evaluando $g(15)$. Si se sustituye $x = 15$ en la ecuación (17.17),

$$\begin{aligned} S &= 30(15) - 15^2 \\ &= 450 - 225 = \$225 \end{aligned}$$

También podría haberse llegado a esta respuesta multiplicando el sueldo por hora de \$15 por el tiempo del viaje de 15 horas.

e) El sueldo de \$225 por un viaje de 15 horas es \$25 más que el que se paga por un tiempo de viaje de 20 horas o más.

Ejemplo 17

(Construcción de tuberías: Escenario de motivación) Una compañía petrolera planea construir una tubería para llevar petróleo desde un gran pozo hasta el punto donde será cargado en camiones cisterna y transportado a las refinerías. La figura 17.16 muestra las localizaciones relativas del sitio de perforación *A* y el punto de destino *C*. Los puntos *A* y *C* son los extremos opuestos de un bosque de aproximadamente 25 millas de ancho. El punto *C* se halla también a 100 millas al sur de *A*. La compañía petrolera propone construir una tubería que corra al sur a lo largo del lado este del bosque y que en algún punto *x* lo atraviese hasta el punto *C*. Los costos de construcción son \$100 000 por milla a lo largo del borde del bosque y \$200 000 por milla para la sección que cruza el bosque. Determine el punto de cruce *x* que reduzca al mínimo los costos de construcción de la tubería.

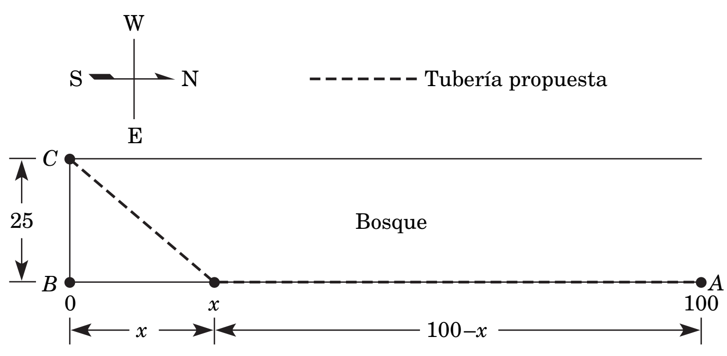

Figura 17.16

SOLUCIÓN

Los costos de construcción se calcularon conforme a la fórmula

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Costo} &= \$100\,000/\text{milla (millas de la tubería bordeando el bosque)}\\ &\quad + \$200\,000/\text{milla (millas de la tubería cruzando el bosque)}\end{aligned}} \tag{17.18}$$

La distancia entre el punto A y el punto de cruce x es $(100 - x)$ millas.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo recto con base a, altura b e hipotenusa c,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

o bien

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Véase la figura 17.17.

Empleando el teorema de Pitágoras, la longitud de la sección de la tubería comprendida entre C y x es

$$\sqrt{x^2 + (25)^2}$$

Al aplicar la ecuación (17.18), el costo total de construcción de la tubería, C (expresado en miles de dólares) es

$$\begin{aligned}C &= f(x)\\ &= 100(100 - x) + 200\sqrt{x^2 + (25)^2}\\ &= 10\,000 - 100x + 200\sqrt{x^2 + 625}\\ &= 10\,000 - 100x + 200(x^2 + 625)^{1/2}\end{aligned} \tag{17.19}$$

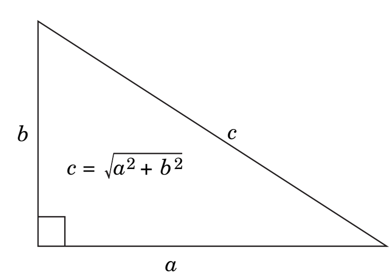

Figura 17.17 Teorema de Pitágoras.

Para examinar f para cualquier mínimo relativo se calcula la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= -100 + 200(\tfrac{1}{2})(x^2 + 625)^{-1/2}(2x) \\ &= -100 + 200x(x^2 + 625)^{-1/2} \\ &= -100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} \end{aligned}$$

Al hacer f' igual a cero,

$$-100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} = 0$$

$$\frac{200x}{\sqrt{x^2 + 625}} = 100$$

$$\frac{200x}{100} = \sqrt{x^2 + 625}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 625} \tag{17.20}$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (17.20),

$$4x^2 = x^2 + 625$$

$$3x^2 = 625$$

$$x^2 = \frac{625}{3} = 208.33$$

y se presenta un valor crítico (relevante) cuando $x = 14.43$. (Una raíz negativa carece de sentido.)

Ejercicio de práctica

Con la prueba de la segunda derivada verifique que f tenga un mínimo relativo cuando $x = 14.43$.

El ejercicio anterior deberá comprobar que se presenta un mínimo relativo cuando $x = 14.43$, esto es, que la tubería deberá cruzar el bosque después de que haya avanzado 85.57 millas hacia el sur. Los costos totales de la construcción (en miles de dólares) pueden calcularse sustituyendo $x = 14.43$ en la ecuación (17.19), o sea

$$\begin{aligned} C &= 10\,000 - 100(14.43) + 200\sqrt{(14.43)^2 + 625} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200\sqrt{833.22} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200(28.86) \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 5\,772 \\ &= 14\,329\ (\$1\,000) \\ &= \$14\,329\,000 \end{aligned}$$

❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué otro procedimiento podría usarse para calcular el costo mínimo total de \$14 329 000?

El ejemplo siguiente, aunque no es una aplicación de optimización, es de particular importancia en economía.

Ejemplo 18

(Elasticidad de la demanda) Un concepto importante en economía y teoría de precios es el de la **elasticidad del precio de la demanda**, o más simplemente, la **elasticidad de la demanda**. Si se tiene la función de demanda de un producto $q = f(p)$ y un punto especificado (p, q) en la función de demanda, la elasticidad de la demanda será la razón o cociente

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la cantidad demandada}}{\text{Cambio porcentual del precio}} \tag{17.21}$$

Esta razón es una medida de la respuesta *relativa* de la demanda ante los cambios en el precio. La ecuación (17.21) puede expresarse de manera simbólica como

$$\frac{\dfrac{\Delta q}{q}}{\dfrac{\Delta p}{p}} \tag{17.22}$$

La elasticidad de la demanda puntual es el límite de la ecuación (17.22) a medida que $\Delta p \to 0$. Utilizando la letra griega η (eta) para denotar la *elasticidad de la demanda puntual en un punto* (p, q),

$$\begin{aligned}\eta &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\dfrac{\Delta q}{q}}{\dfrac{\Delta p}{p}} \\ &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{p}{\Delta p} \\ &= \frac{p}{q} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}\end{aligned}$$

o bien,

$$\boxed{\eta = \frac{p}{q} \cdot f'(p)} \tag{17.23}$$

Dada la función de demanda $q = f(p) = 500 - 25p$, calcule la elasticidad de la demanda puntual para los precios de: *a*) \$15, *b*) \$10 y *c*) \$5.

Para p = \$15

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{p}{q} \cdot f'(p)\\ &= \frac{15}{f(15)} \cdot (-25)\\ &= \frac{15}{500 - 25(15)}(-25)\\ &= \frac{-375}{125} = -3\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -3$ es que a un precio de \$15, un incremento en precio de un 1% produciría decremento de la cantidad demandada de aproximadamente 3%. Se estima un cambio porcentual en la demanda de tres veces el cambio porcentual en el precio.

Para p = \$10

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{10}{f(10)}(-25)\\ &= \frac{10}{500 - 25(10)}(-25)\\ &= \frac{-250}{250} = -1\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -1$ es que para un precio de \$10, un incremento en precio de 1% produciría decremento en la cantidad demandada de aproximadamente 1%. Se estima un cambio porcentual similar en la demanda respecto del cambio porcentual en el precio.

Para p = \$5

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{5}{f(5)}(-25)\\ &= \frac{5}{500 - 25(5)}(-25)\\ &= \frac{-125}{375} = -1/3\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -1/3$ es que a un precio de \$5, un incremento en precio de un 1% produciría un decremento en la cantidad demandada de aproximadamente 0.33%. Se estima un cambio porcentual menor en la demanda con respecto al cambio porcentual en el precio. ❑

Los economistas clasifican los valores de la elasticidad en tres categorías.

❑ ***Caso 1* ($|\eta| > 1$):** El cambio porcentual en la demanda es mayor que el que se opera en el precio (por ejemplo, un cambio de 1% en el precio origina un cambio mayor que 1% en la demanda). En estas regiones de una función de demanda, se dice que la demanda es ***elástica***.

❑ ***Caso 2* ($|\eta| < 1$):** El cambio porcentual en la demanda es menor que el que se opera en el precio. En estas regiones de la función de demanda, se dice que la demanda es ***inelástica***.

❑ ***Caso 3* ($|\eta| = 1$):** El cambio porcentual en la demanda es igual que el que se opera en el precio. En estas regiones de la función de demanda se dice que la demanda es ***elástica unitaria***.

Sección 17.2 Ejercicios de seguimiento

1. Una persona desea cercar un jardín rectangular que tendrá una superficie de 1 500 pies cuadrados. Determine las dimensiones que crearán la superficie deseada, pero que requerirán la longitud mínima de cerca.

2. El dueño de un rancho quiere construir un corral rectangular de jineteo que tenga una superficie de 5 000 metros cuadrados. Si el corral es como el de la figura 17.18, determine las dimensiones x y y que requerirán la longitud mínima de cerca. (*Sugerencia:* Formule una función para la longitud total de la cerca, expresada en términos de x y y. Recuérdese entonces que $xy = 5\,000$, y vuelva a formular la función de longitud en términos de x o de y.)

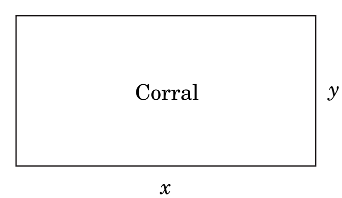

Figura 17.18

3. Un pequeño club de playa ha recibido 300 metros de barrera de flotación para encerrar una superficie de nado. Se pretende crear la máxima superficie rectangular de nado con los 300 metros de barrera de flotación. La figura 17.19 muestra el diseño propuesto. Adviértase que la barrera de flotación se necesita únicamente en tres lados del área de nado.

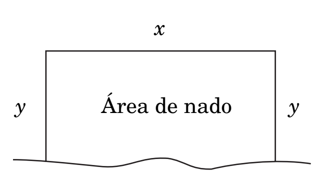

Figura 17.19

Determine las dimensiones de x y y que produzcan la máxima superficie de nado. ¿Cuál es la superficie máxima? (*Sugerencia:* Recuerde que $x + 2y = 300$.)

4. Un distribuidor de automóviles desea crear un área de estacionamiento cerca de un gran puerto de Estados Unidos para almacenar los automóviles nuevos procedentes de Japón. El área deberá