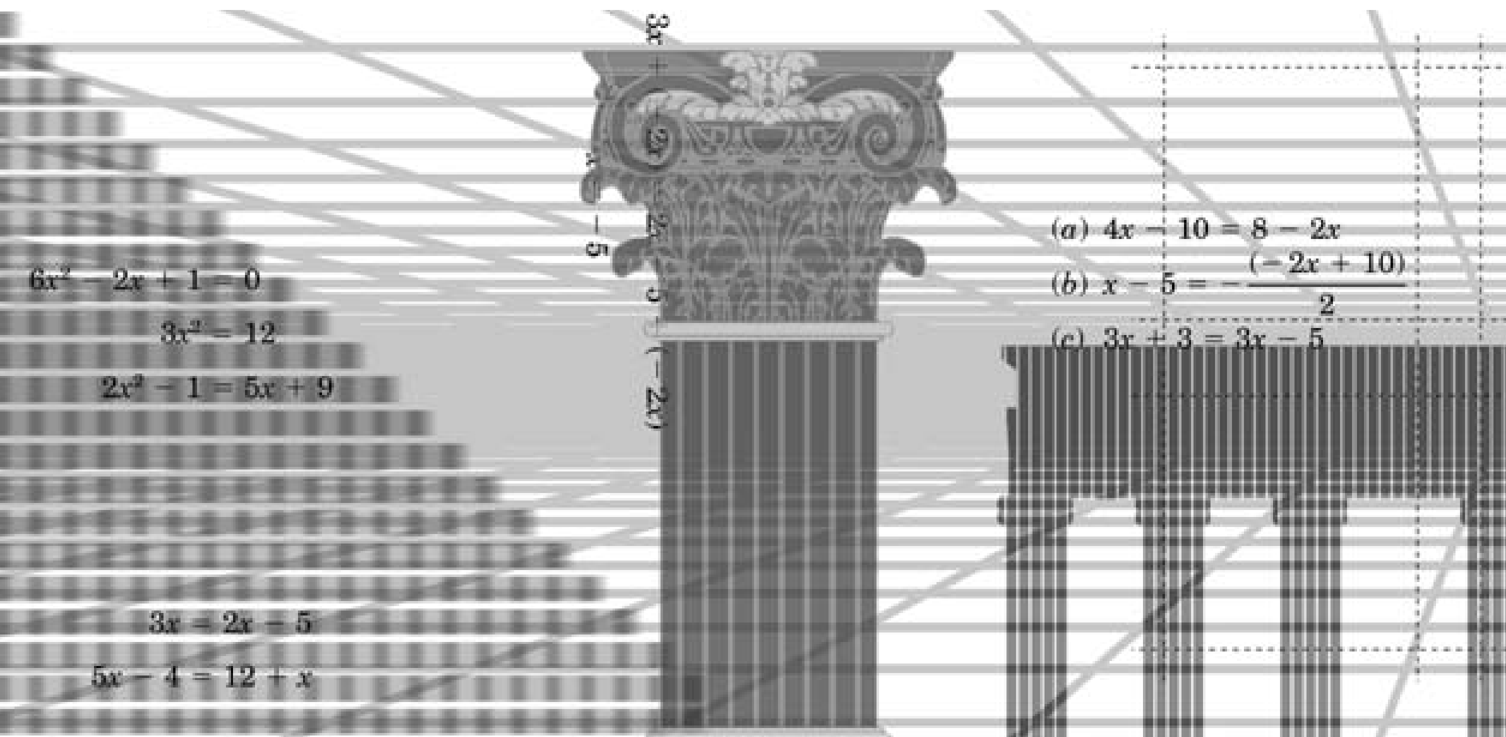
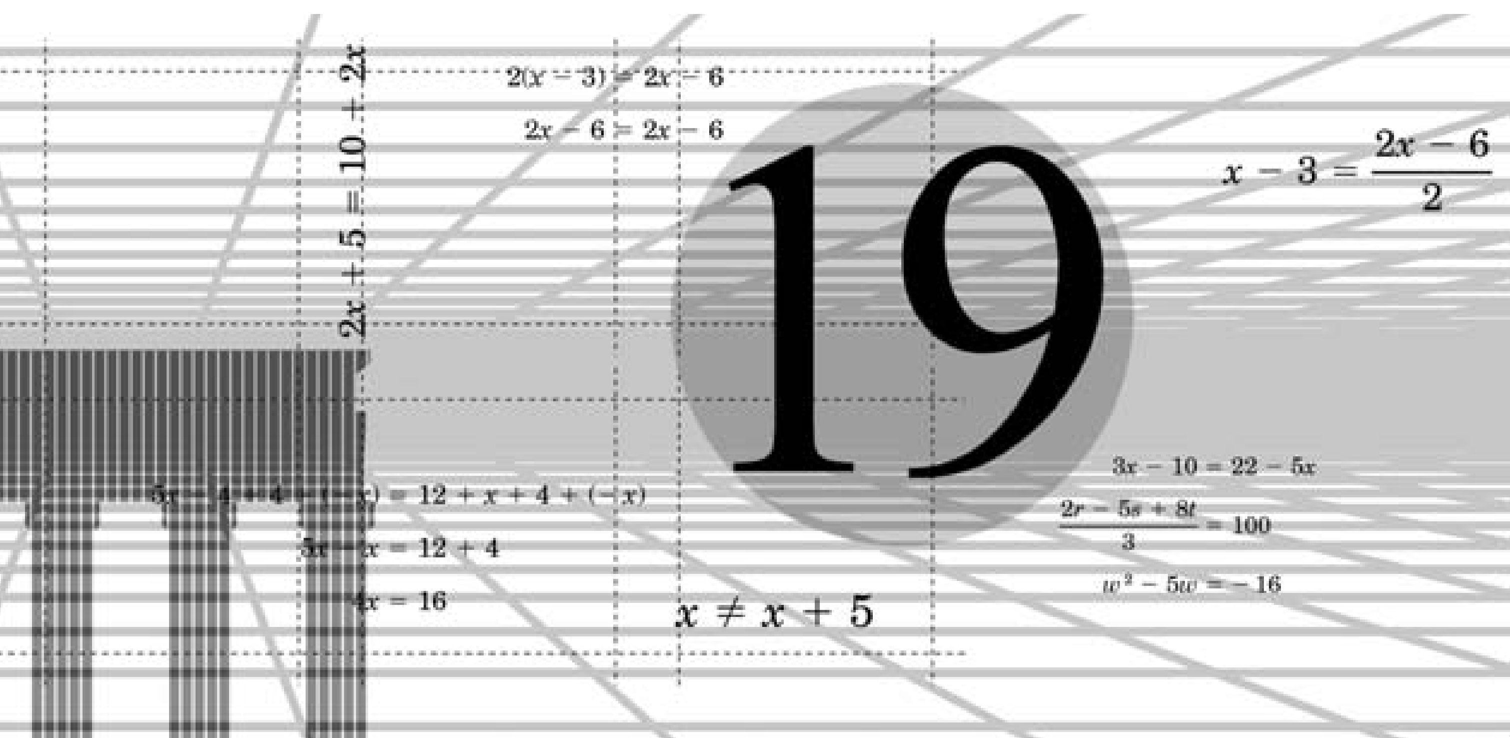
CAPÍTULO 19

Cálculo integral: aplicaciones



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer una introducción a la integral definida.
- Ilustrar la aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas.
- Presentar una gran variedad de aplicaciones del cálculo integral.
- Dar ejemplos de la relación que hay entre el cálculo integral y la teoría de la probabilidad.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Administración del banco de sangre

El banco de sangre de un hospital lleva a cabo una campaña de donación de sangre para reponer sus reservas. El hospital estima que la sangre se donará a una tasa de $d(t)$ unidades o "pintas" por día (1 pinta equivale a 0.47 litros en Estados Unidos y a 0.57 litros en el Reino Unido; *N. del T.*), donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y la t representa la duración de la campaña en días. *Si el objetivo de la campaña de donación de sangre es obtener 1 000 unidades ("pintas"), los administradores del hospital desean saber cuánto les tomará alcanzar esa meta* (ejemplo 24).

Este capítulo se centra en la aplicación del cálculo integral. En particular, se explicará la *integral definida*, el uso de las integrales definidas en el cálculo de áreas debajo y entre las curvas, diversas aplicaciones que se valen del cálculo integral y su aplicación a la teoría de la probabilidad.

19.1 Integrales definidas

En la presente sección se explicará la integral definida, que constituye el fundamento de muchas aplicaciones del cálculo integral.

La integral definida

La *integral definida* puede interpretarse como un área y como un límite. Examínese atentamente la gráfica de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, que aparece en la figura 19.1. Supóngase que se desea determinar el área sombreada A debajo de la curva comprendida entre $x = 1$ y $x = 3$. Un procedimiento consiste en *aproximar* el área calculando las superficies de un conjunto de rectángulos que están contenidos en la región sombreada. En la figura 19.2 se han trazado dos rectángulos dentro del área de interés. El ancho de cada uno es 1, y sus alturas respectivas son $f(1)$ y $f(2)$. Si se usa la suma de las áreas de los dos rectángulos para aproximar la que se desea conocer, se tendrá

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (1) + f(2) \cdot (1) \\ &= (1)^2 \cdot (1) + (2)^2 \cdot (1) \\ &= (1)(1) + (4)(1) = 5 \end{aligned}$$

donde A^* es el área aproximada. Nótese que en esta aproximación se *subestima* el área real. El error introducido se representa con las zonas sombreadas más ligeramente.

En la figura 19.3 se han trazado cuatro rectángulos dentro del área de interés. Su ancho es de $\frac{1}{2}$, y la superficie total de los cuatro rectángulos se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.5) + f(1.5) \cdot (0.5) + f(2) \cdot (0.5) + f(2.5) \cdot (0.5) \\ &= (1)^3 \cdot (0.5) + (1.5)^2 \cdot (0.5) + (2)^2 \cdot (0.5) + (2.5)^2 \cdot (0.5) \\ &= (1)(0.5) + (2.25)(0.5) + (4)(0.5) + (6.25)(0.5) \\ &= 0.5 + 1.125 + 2.0 + 3.125 = 6.75 \end{aligned}$$

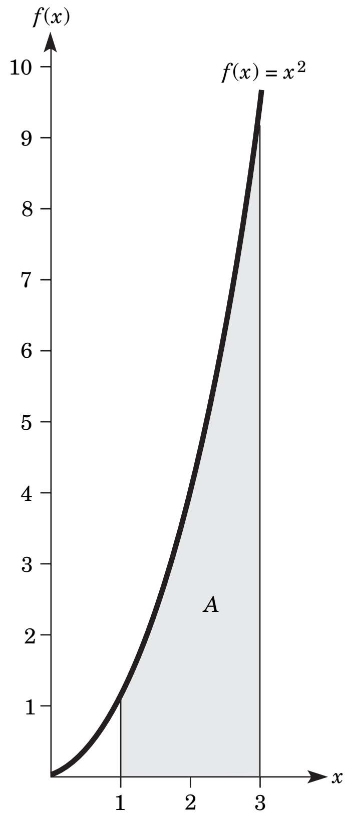


Figura 19.1

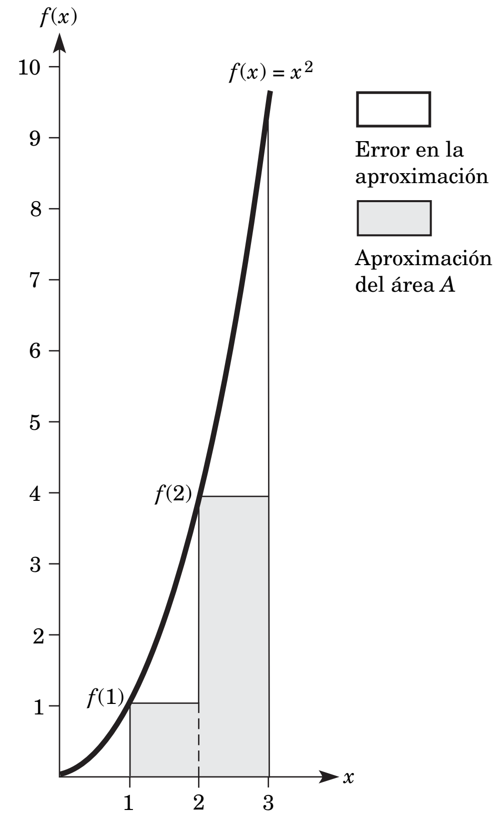


Figura 19.2 Aproximación mediante dos rectángulos.

En comparación con la figura 19.2, el empleo de cuatro rectángulos en vez de dos da una mejor aproximación del área real. El área sombreada más ligeramente es menor en la figura 19.3.

En la figura 19.4 se trazaron ocho rectángulos, cada uno con un ancho igual a 0.25. Su superficie se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.25) + f(1.25) \cdot (0.25) + \cdots + f(2.75) \cdot (0.25) \\ &= (1)^2 \cdot (0.25) + (1.25)^2 \cdot (0.25) + \cdots + (2.75)^2 \cdot (0.25) \\ &= (1)(0.25) + (1.5625)(0.25) + \cdots + (7.5625)(0.25) = 7.6781 \end{aligned}$$

Obsérvese que esta aproximación es mejor que las otras. De hecho, si se sigue subdividiendo el intervalo entre $x = 1$ y $x = 3$, haciendo cada vez más pequeña la base de cada rectángulo, la aproximación se acercará más y más al área real (que, según se determinará, es de $8\frac{2}{3}$).

A continuación se estudiará este proceso desde una perspectiva más amplia. Tómese, por ejemplo, la función de la figura 19.5. Supóngase que se desea determinar el área debajo de la curva, pero por arriba del eje de las x entre $x = a$ y $x = b$. Supóngase, además, que el intervalo se haya subdividido en n rectángulos. Asimismo, que el ancho del rectángulo i es Δx_i y que su altura es $f(x_i)$. No es necesario dar por hecho que el ancho de cada rectángulo

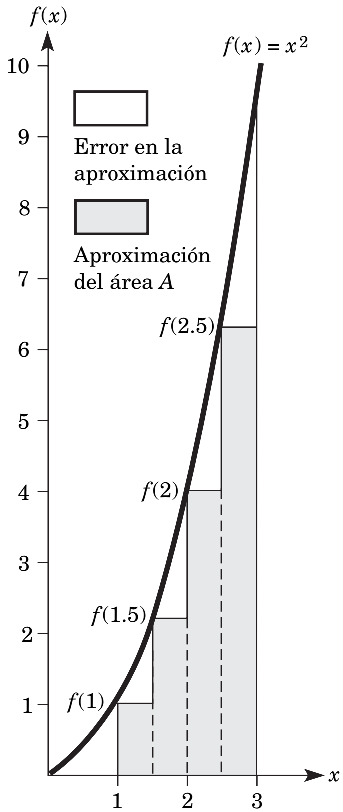


Figura 19.3 Aproximación mediante cuatro rectángulos.

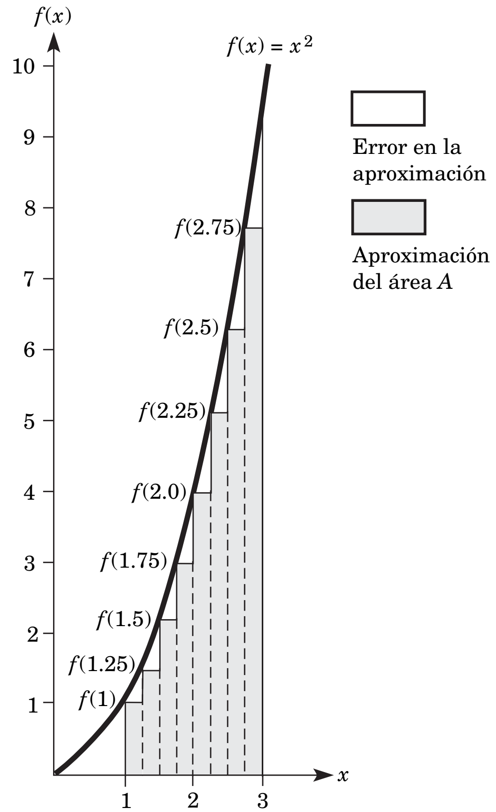


Figura 19.4 Aproximación con ocho rectángulos.

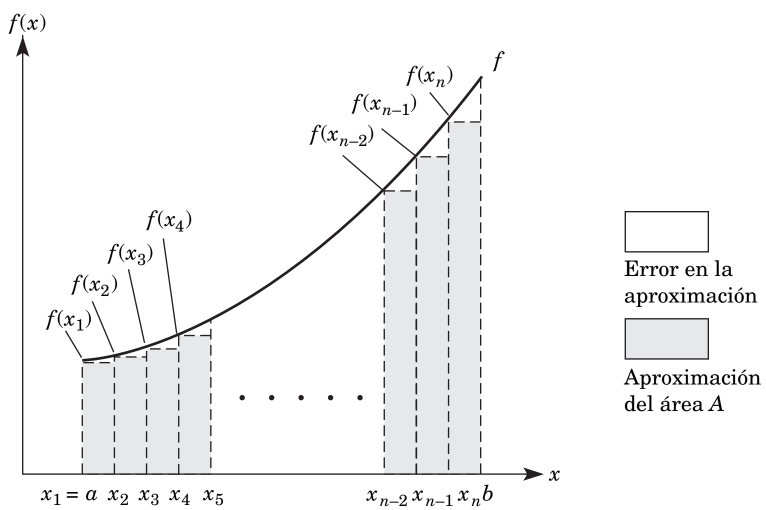


Figura 19.5 Aproximación con n rectángulos.

sea igual. Se puede aproximar el área de interés sumando las áreas de n rectángulos, es decir,

$$\begin{aligned} A^* &= f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\,\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \end{aligned}$$

Como se dijo en cuanto a la función $f(x) = x^2$, la aproximación siempre se vuelve más exacta al irse reduciendo el ancho de los rectángulos y, por lo tanto, conforme el número de rectángulos se torna simultáneamente más grande. Esta observación puede formalizarse al afirmar que *cuando existe el límite*,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = A} \tag{19.1}$$

Es decir, el área real bajo la curva A es el valor límite de la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos, a medida que el número de rectángulos se acerca al infinito (y el ancho Δx_i de cada uno se aproxima a 0).

Del mismo modo que el signo de la sumatoria Σ se aplica cuando se desea sumar elementos discretos, también la integral definida implica la suma de funciones continuas.

Definición: Integral definida

Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, se definirá la ***integral definida*** de f en los siguientes términos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = A \tag{19.2}$$

a condición de que exista este límite, a medida que el tamaño de todos los intervalos de la subdivisión tienda a cero y, por lo tanto, el número de intervalos n se aproxime al infinito.

El lado izquierdo de la ecuación (19.2) muestra la notación de la *integral definida*. Los valores a y b que aparecen, respectivamente, debajo y arriba del signo de la integral se llaman ***límites de integración***. El ***límite inferior de integración*** es a, y el ***límite superior de integración*** es b. La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ puede describirse como "*la integral definida de f entre un límite inferior $x = a$ y un límite superior $x = b$*", o más simple, "*la integral de f entre a y b*".

Evaluación de las integrales definidas

La evaluación de las integrales definidas se facilita con el siguiente teorema de gran importancia.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si una función f es continua sobre un intervalo y F es cualquier antiderivada de f, entonces para cualquier punto $x = a$ y $x = b$ en el intervalo, donde $a \leq b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{19.3}$$

Conforme al teorema fundamental del cálculo integral, la integral definida puede evaluarse ya sea: 1) determinando la integral indefinida $F(x) + C$, y 2) calculando $F(b) - F(a)$, algunas veces denotada con $F(x)]_a^b$. Como se verá en el siguiente ejemplo, no hay necesidad de incluir la constante de integración al evaluar las integrales definidas.

Ejemplo 1 Para evaluar $\int_0^3 x^2\,dx$, la integral indefinida es

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg]_0^3 &= \left(\frac{3^3}{3} + C\right) - \left(\frac{0^3}{3} + C\right) \\ &= 9 + C - C \\ &= 9 \end{aligned}$$

❑

Cuando se evalúan integrales definidas, siempre se resta el valor de la integral indefinida en el límite inferior de integración, al valor del límite superior de integración. ***La constante de integración invariablemente desaparece en este cálculo, como sucedió en el ejemplo. Por lo tanto, no se necesita incluir la constante al evaluar las integrales definidas.***

Ejemplo 2 Para evaluar $\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)\,dx$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (2x^2 - 4x + 5)\,dx \\ &= \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \\ &= \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)\,dx = \left.\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_1^4$$
$$= \left[\frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 5(4)\right] - \left[\frac{2(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 5(1)\right]$$
$$= (\tfrac{128}{3} - 32 + 20) - (\tfrac{2}{3} - 2 + 5) = 30\tfrac{2}{3} - 3\tfrac{2}{3} = 27$$ ❑

Ejercicio de práctica

Evalúe $\int_1^3 (x^3 - 2x)\,dx$. *Respuesta:* 12.

Ejemplo 3 Para evaluar $\int_{-2}^{1} e^x\,dx$,

$$F(x) = \int e^x\,dx$$
$$= e^x$$

Por consiguiente,
$$\int_{-2}^{1} e^x\,dx = \left. e^x \right]_{-2}^{1}$$
$$= e^1 - e^{-2}$$

o, según la tabla 1,
$$e^1 - e^{-2} = 2.7183 - 0.1353$$
$$= 2.5830$$

Ejemplo 4 Para evaluar $\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$,

$$F(x) = \int \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}$$

y de acuerdo con la regla 9,
$$F(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1)$$

En consecuencia,
$$\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} = \left.\tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1)\right]_2^4$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln(4^2 - 1) - \tfrac{1}{2}\ln(2^2 - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln 15 - \tfrac{1}{2}\ln 3$$

Según la tabla 2,
$$\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} = \tfrac{1}{2}(2.7081) - \tfrac{1}{2}(1.0986)$$
$$= 1.35405 - 0.5493 = 0.80475$$ ❑

Ejercicio de práctica

Evalúe: *a*) $\int_{-1}^{2} e^{2x}\,dx$ y *b*) $\int_{1}^{3} \frac{4x}{x^2+5}\,dx$. *Respuesta: a*) 27.23135, *b*) 1.6946.

Propiedades de las integrales definidas

Existen diversas propiedades que pueden ser de ayuda al evaluar las integrales definidas. Se incluyen a continuación, junto con ejemplos que las explican.

Propiedad 1

Si f está definida y es continua en el intervalo (a, b),

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{19.4}$$

Ejemplo 5

Considere la función $f(x) = 4x^3$.

$$\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_{-2}^{1} = x^4\Big]_{-2}^{1}$$
$$= (1)^4 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15$$

$$\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_{1}^{-2} = x^4\Big]_{1}^{-2}$$
$$= (-2)^4 - (1)^4 = 16 - 1 = 15$$

Por consiguiente,

$$\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx = -\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx$$

❑

Propiedad 2

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{19.5}$$

Ejemplo 6

$$\int_{10}^{10} e^x\,dx = e^x\Big]_{10}^{10}$$
$$= e^{10} - e^{10}$$
$$= 0$$

❑

Propiedad 3

Si f es continua en el intervalo (a, c) y $a < b < c$,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{19.6}$$

Ejemplo 7

Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_0^4 3x^2\,dx &= \frac{3x^3}{3}\Big]_0^4 = x^3\Big]_0^4 \\ &= (4)^3 - (0)^3 = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx &= x^3\Big]_0^2 + x^3\Big]_2^4 \\ &= [(2)^3 - (0)^3] + [(4)^3 - (2)^3] \\ &= (8 - 0) + (64 - 8) = 64\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

o bien

$$64 = 64$$

❑

Ejercicio de práctica

Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^4 3x^2\,dx$$

Propiedad 4

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{19.7}$$

donde c es constante.

Ejemplo 8 Demuestre que para la función del ejemplo 7,

$$\int_0^4 3x^2\,dx = 3\int_0^4 x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

En el ejemplo 7 se probó que $\int_0^4 3x^2\,dx$ es igual a 64. Se necesita evaluar $3\int_0^4 x^2\,dx$.

$$\begin{aligned} 3\int_0^4 x^2\,dx &= 3\,\frac{x^3}{3}\Big]_0^4 \\ &= 3\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] = 3\left(\frac{64}{3}\right) = 64 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 5

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad \textbf{(19.8)}$$

Ejemplo 9 Suponga que se desea evaluar

$$\int_2^4 (4x-5)\,dx + \int_2^4 (5-6x)\,dx$$

Debido a que los límites de la integración son los mismos, la ecuación (19.8) indica que los integrandos pueden combinarse algebraicamente con una integral definida, es decir,

$$\begin{aligned} \int_2^4 (4x-5)\,dx + \int_2^4 (5-6x)\,dx &= \int_2^4 [(4x-5)+(5-6x)]\,dx \\ &= \int_2^4 (-2x)\,dx \\ &= -x^2\Big]_2^4 \\ &= [-(4)^2] - [-(2)^2] \\ &= -16 + 4 = -12 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Evalúe

$$\int_2^4 (4x - 5)\, dx + \int_2^4 (5 - 6x)\, dx$$

utilizando las dos integrales definidas y verifique que la suma sea igual a -12.

Sección 19.1 Ejercicios de seguimiento

Evalúe las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^3 x\, dx$

2. $\int_2^4 (x + 2)\, dx$

3. $\int_1^5 dx$

4. $\int_{-2}^2 8\, dx$

5. $\int_{-1}^3 2x\, dx$

6. $\int_{-1}^1 -8x\, dx$

7. $\int_0^2 (x^2 + 4x)\, dx$

8. $\int_0^4 (4x^3 + 3x^2)\, dx$

9. $\int_0^{49} \sqrt{x}\, dx$

10. $\int_{-2}^2 2e^x\, dx$

11. $\int_4^6 (dx/x)$

12. $\int_4^9 (4\, dx/x)$

13. $\int_{-3}^0 (2x)e^{x^2}\, dx$

14. $\int_{-1}^0 (3x^2)e^{x^3}\, dx$

15. $\int_{-1}^1 5x\, dx$

16. $\int_{-2}^1 2x^3\, dx$

17. $\int_b^b 6x^2\, dx$

18. $\int_c^c 4x^3\, dx$

19. $\int_0^4 (2x + 5)\, dx$

20. $\int_2^4 3x^2\, dx$

21. $\int_6^{12} 10\, dx$

22. $\int_0^3 4x^3\, dx$

23. $\int_0^2 (x + 3)^2\, dx$

24. $\int_9^{16} \sqrt{x}\, dx$

25. $\int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 6)\, dx$

26. $\int_1^4 3x^5\, dx$

27. $\int_2^3 -9x^2\, dx$

28. $\int_2^4 -3e^x\, dx$

29. $\int_0^4 e^x\, dx$

30. $\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx$

31. $\int_2^4 (dx/2x)$

32. $\int_1^3 \frac{2x}{x^2 - 4}\, dx$

33. $\int_{-2}^2 (3x^2 + 4x + 10)\, dx$

34. $\int_{-2}^1 (4x^3 + 6x^2)\, dx$

35. $\int_0^2 5e^{5x}\, dx$

36. $\int_{-1}^2 12e^{6x}\, dx$

37. $\int_0^4 2x(x^2 + 4)^2\, dx$

38. $\int_0^2 -6x(3x^2 + 4)^3\, dx$

39. $\int_1^4 (6\, dx/x)$

40. $\int_4^{10} (-20\, dx/x)$

41. $\int_4^6 \frac{6x}{3x^2 - 5}\, dx$

42. $\int_5^{10} \frac{-5x\, dx}{5x^2 - 4}$

43. $\int_1^3 \frac{6x^2}{x^3 + 6}\, dx$

44. $\int_2^4 \frac{-12x^2}{2x^3 + 3}\, dx$

45. $\int_2^4 \frac{2x^2 + x}{4x^3 + 6x^2}\, dx$

46. $\int_1^4 \frac{3x^2 + x}{8x^3 + 4x^2}\, dx$

47. $\int_1^2 (mx - b)\, dx$

48. $\int_0^3 (ax^2 + bx + c)\, dx$

49. $\int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 1}\, dx$

50. $\int_3^5 \frac{6x}{x^2 + 4}\, dx$

51. $\int_2^4 (x^2 + 3x + 1)\, dx - \int_2^4 (2x^2 - 7x + 1)\, dx$

52. $\int_0^3 (6x^2 + 4x + 12)\, dx + \int_0^3 (3x^2 - 2x + 8)\, dx$

53. $\int_2^4 (5x^3 + 5x^2)\, dx - \int_2^4 (8x^3 + 6x^2 + 10)\, dx$

54. $\int_{-2}^1 (5x^2 + 2x + 3)\, dx - \int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 4)\, dx$

55. $\int_2^4 (x + 8)\, dx - \int_4^2 (2x - 6)\, dx$

56. $\int_1^3 (x^2 + 8)\, dx + \int_3^1 (-2x^2 + 10)\, dx$

57. $\int_0^3 (3x^2 + 2x + 4)\, dx - \int_3^0 (x^2 + 5x)\, dx$

58. $\int_1^4 (10x^2 - 8x + 3)\, dx + \int_4^1 (8x^2 + 4x - 8)\, dx$

59. $\int_0^3 5e^x\, dx - \int_3^0 2e^x\, dx$

60. $\int_1^2 (4\, dx/x) + \int_2^1 (3\, dx/x)$

19.2 Integrales definidas y áreas

Una de las aplicaciones prácticas del cálculo integral es el hecho de que las integrales definidas pueden emplearse para determinar áreas. Puede tratarse de superficies que están acotadas por curvas, las cuales representan funciones, los ejes de coordenadas, o ambos. En la sección 19.4 se estudiarán situaciones donde esas áreas tienen un significado especial en el problema en que se usan.

Áreas entre una función y el eje de las *x*

Las integrales definidas pueden servir para obtener el área situada entre la curva que representa una función y el eje de las *x*. Se pueden presentar diversos casos. Su tratamiento es variable y se explicará en seguida.

Caso 1: ($f(x) > 0$)

Cuando el valor de una función f continua es positivo en el intervalo $a \leq x \leq b$ (es decir, que la gráfica de f se encuentre por arriba del eje de las x), el área que está acotada por f, el eje de las x, $x = a$ y $x = b$ se determina mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

En la figura 19.6 se describe esta situación.

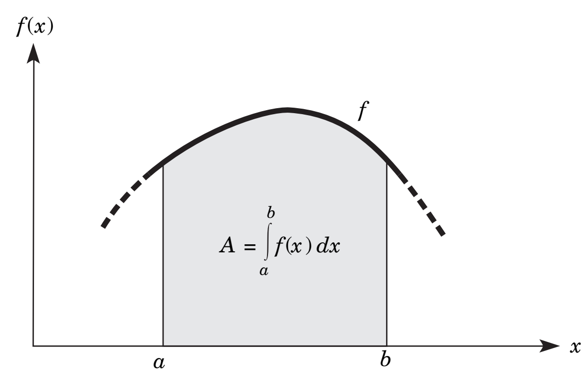


Figura 19.6 Determinación de áreas sobre el eje de las x.

Ejemplo 10 Encuentre el área debajo de $f(x) = x^2$ y por arriba del eje de las x, entre $x = 1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

Esta área se indicó antes en la figura 19.1. Se calcula así

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^3 x^2\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 \\
&= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \tfrac{1}{3} = 8\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

El área (exacta) es $8\frac{2}{3}$ unidades *cuadradas*.

Ejemplo 11 Determine el área indicada en la figura 19.7.

SOLUCIÓN

Demos por anticipado la respuesta usando fórmulas muy conocidas con las cuales se obtienen las áreas de un rectángulo y de un triángulo. Como se advierte en la figura 19.8, el área de interés puede considerarse compuesta por un rectángulo de superficie A_2 y un triángulo de superficie A_1. Por lo tanto,

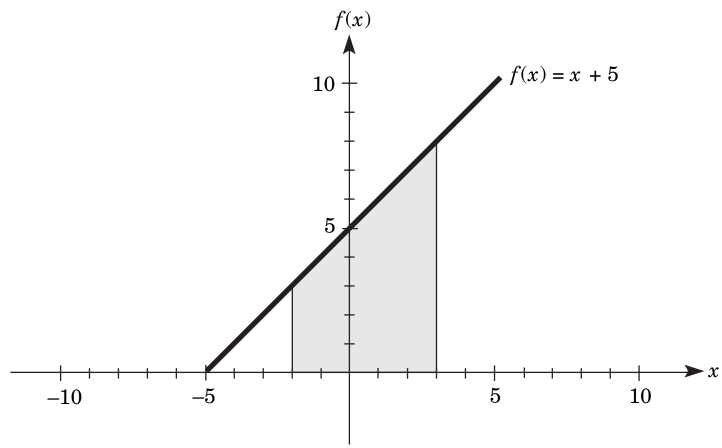


Figura 19.7

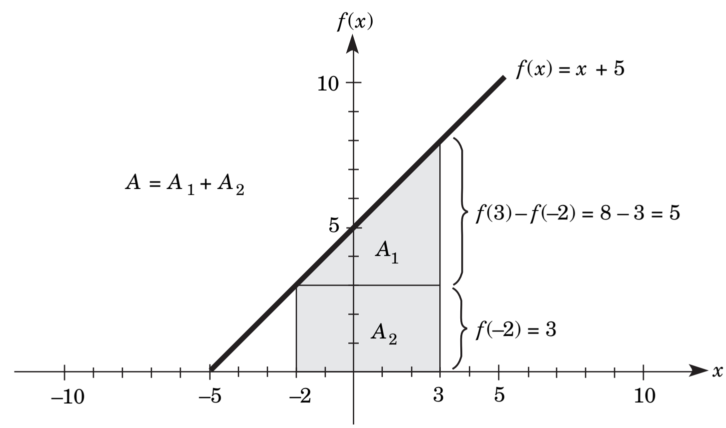


Figura 19.8

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \tfrac{1}{2}bh + lw \\ &= \tfrac{1}{2}(5)(5) + (5)(3) = 12.5 + 15 = 27.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Al emplear la integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{3} (x + 5)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x \Big]_{-2}^{3} \\ &= \left[\frac{(3)^2}{2} + 5(3)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 5(-2)\right] \\ &= (\tfrac{9}{2} + 15) - (2 - 10) = 19.5 - (-8) = 27.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Para la función en la figura 19.7, determine el área entre la curva y el eje de las x, la cual se encuentra acotada a la izquierda por $x = 2$ y a la derecha por $x = 6$. *Respuesta:* 36.

Caso 2: $(f(x) < 0)$

Cuando el valor de una función continua f es negativo en el intervalo $a \leq x \leq b$ (es decir, la gráfica de f se halla por debajo del eje de las x), el área que está acotada por f, el eje de las x, $x = a$ y $x = b$ se determina mediante

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Sin embargo, la integral definida evalúa el área como *negativa* si se encuentra debajo del eje de las x. Puesto que el área es absoluta (o *positiva*), se calculará como

$$-\int_a^b f(x)\, dx$$

Ejemplo 12 Calcule el área indicada en la figura 19.9.

SOLUCIÓN

Dado que f es una función negativa,

$$A = -\int_{2.5}^{3.5} -\frac{x^3}{2}\, dx$$

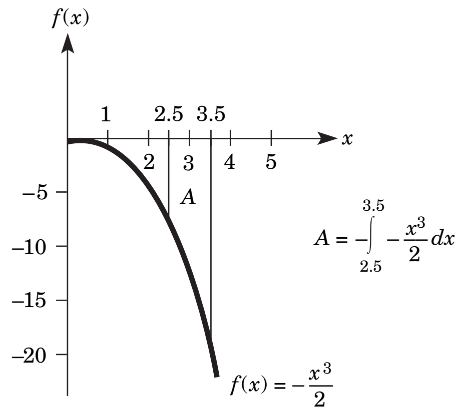


Figura 19.9

$$= -\left[-\frac{x^4}{8}\right]_{2.5}^{3.5}$$

$$= -\left\{\left[-\frac{(3.5)^4}{8}\right] - \left[\frac{-(2.5)^4}{8}\right]\right\}$$

$$= -[-18.7578 - (-4.8828)] = -[-13.875] = 13.875 \text{ unidades cuadradas}$$ ❏

Ejercicio de práctica

En la figura 19.9 encuentre el área entre f y el eje de las x, acotada a la izquierda y a la derecha por $x = 2$ y por $x = 5$, respectivamente. *Respuesta:* 609/8, o bien $76\frac{1}{8}$.

Caso 3: ($f(x) < 0$ y $f(x) > 0$)

Cuando el valor de una función continua f es positivo en la parte del intervalo $a \leq x \leq b$ y negativo en el resto del mismo (parte del área comprendida entre f y el eje de las x se halla arriba del eje de las x y parte debajo de él), entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ calcule el ***área neta***. En otras palabras, las áreas situadas por arriba del eje de las x se evalúan como positivas y las que están debajo como negativas. Se combinan algebraicamente para obtener el valor neto.

Ejemplo 13 Evalúe $\int_0^{15} (x - 5)\,dx$ para calcular el área *neta*, la cual se muestra en la figura 19.10.

SOLUCIÓN

Una vez más, se puede anticipar la respuesta aplicando la fórmula con que se mide la superficie de un triángulo. Recuérdese que el área debajo del eje de las x (A_1) se evaluará como negativa cuando se haga la integración; entonces se tendrá

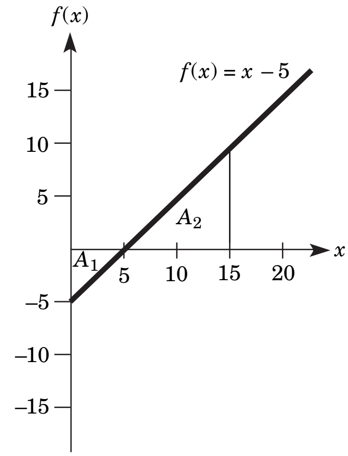


Figura 19.10

$$\begin{aligned} A &= -A_1 + A_2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(5)(5) + \tfrac{1}{2}(10)(10) \\ &= -12.5 + 50 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Al evaluar la integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{15} (x-5)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x\Big]_0^{15} \\ &= \left[\frac{(15)^2}{2} - 5(15)\right] - \left[\frac{0^2}{2} - 5(0)\right] \\ &= (112.5 - 75) - 0 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

❑

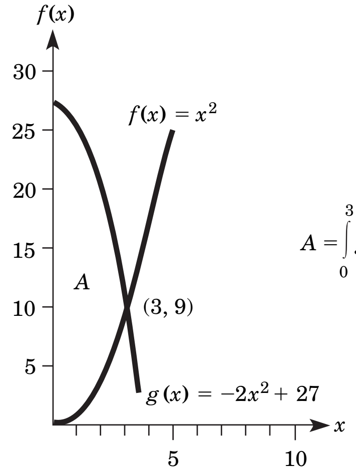
Obtención de áreas entre curvas

En los siguientes ejemplos se describen los procedimientos con que se calculan las áreas comprendidas entre curvas.

Ejemplo 14 Determine el área sombreada entre f y g indicada en la figura 19.11.

SOLUCIÓN

A fin de determinar el área A, es preciso examinar su composición. No es posible calcularla integrando sólo una de las funciones. Una manera de calcularla se advierte en la figura 19.12. Si g se integra entre $x = 0$ y $x = 3$, el área resultante incluye A pero también una superficie adicional que no forma parte de A. Por haber sobreestimado A, habrá que restar el *excedente.* Esta área resulta ser la que se encuentra debajo de f, entre $x = 0$ y $x = 3$. En consecuencia, A puede determinarse como



$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$$

Figura 19.11

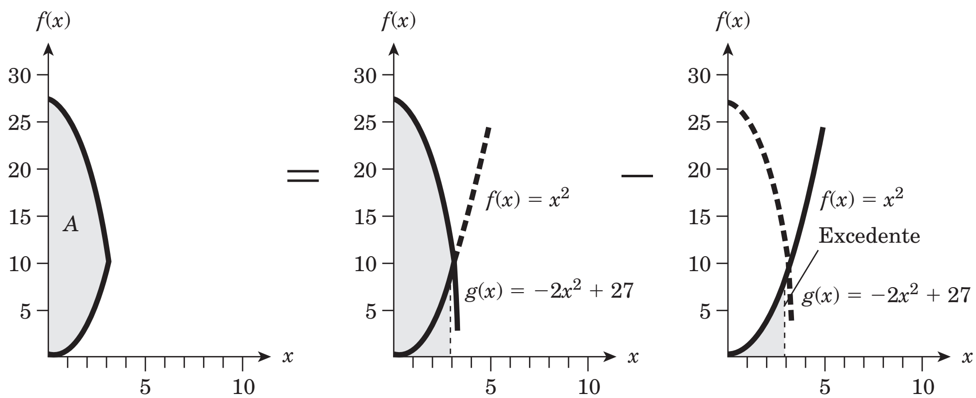


Figura 19.12

$$\boxed{A \quad = \int_0^3 g\,(x)\,dx \; - \int_0^3 f\,(x)\,dx}$$

$$A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx$$

o bien
$$A = \int_0^3 (-2x^2 + 27)\,dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

Si se aplica la propiedad 5,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (-3x^2 + 27)\,dx \\ &= -x^3 + 27x \Big]_0^3 \\ &= [-(3)^3 + 27(3)] - [-(0)^3 + 27(0)] = -27 + 81 - 0 = 54 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

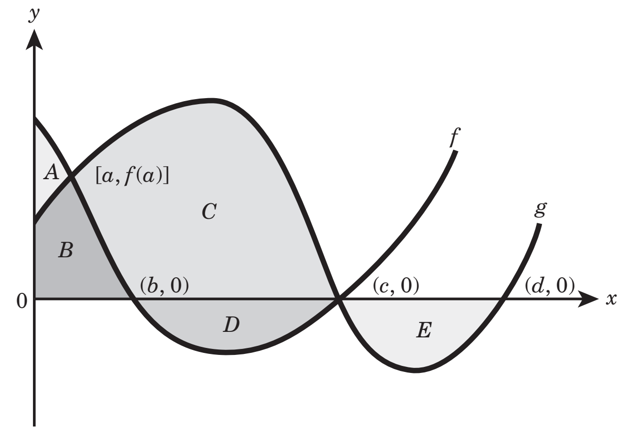


Figura 19.13

Ejemplo 15

De acuerdo con la figura 19.13, determine la combinación de integrales definidas que calcularían el tamaño de: *a*) área *A*, *b*) área *B*, *c*) área *C*.

SOLUCIÓN

Este ejemplo no contiene números reales. Se trata más bien de un ejercicio de la lógica en que se funda la formulación de combinaciones de integrales definidas para determinar las áreas.

a) El límite superior de *A* se determina mediante *f*. Si *f* se integra entre $x = 0$ y $x = a$, el resultado será un área que contenga a_1 y comprende *A* y un área excedente a_2. Esta última puede obtenerse integrando *g* entre $x = 0$ y $x = a$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= a_1 - a_2 \\ &= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx \end{aligned}$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 19.14*a*.

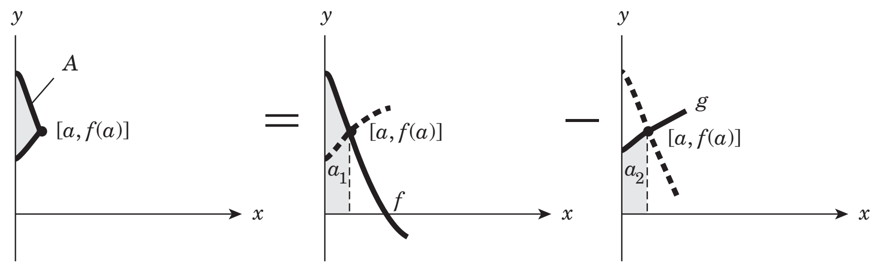
b) *B* puede visualizarse como compuesto de dos subáreas, b_1 y b_2. El límite superior de *B* está determinado por *g* hasta $x = a$ y por *f* cuando $a \le x \le b$. Si se integra *g* entre $x = 0$ y $x = a$, el área resultante será una parte de *B*. La parte restante de *B* puede determinarse integrando a *f* entre $x = a$ y $x = b$. Así pues,

$$\begin{aligned} B &= b_1 + b_2 \\ &= \int_0^a g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 19.14*b*.

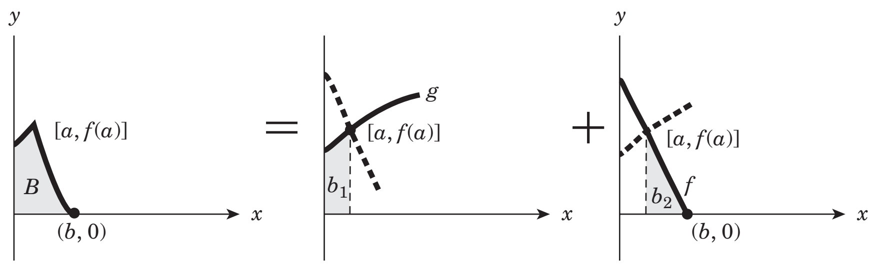
c) El límite superior de *C* se calcula por completo mediante *g*. Si se integra *g* entre $x = a$ y $x = c$, el área resultante c_1 comprende *C* y un área excedente c_2. Esta última puede calcularse integrando a *f* entre $x = a$ y $x = b$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C &= c_1 - c_2 \\ &= \int_a^c g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$



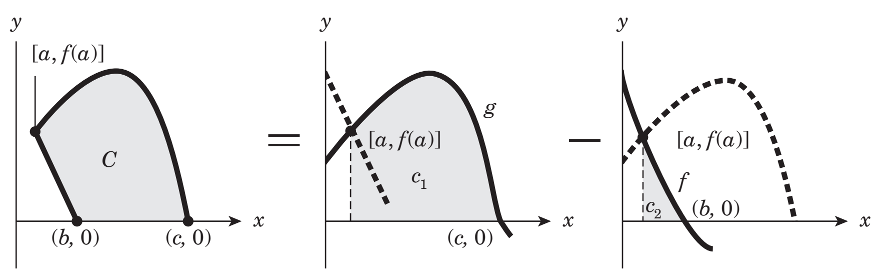
$$A = a_1 - a_2 = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a g(x)dx$$

a)



$$B = b_1 + b_2 = \int_0^a g(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

b)



$$C = c_1 - c_2 = \int_a^c g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

Figura 19.14 *c*)

Esto se indica gráficamente en la figura 19.14*c*. ❑

Ejercicio de práctica

En la figura 19.13 determine la combinación de integrales definidas que calculen: *a*) el área *D* y *b*) el área *E*. *Respuesta:* *a*) $-\int_b^c f(x)\,dx$, *b*) $-\int_c^d g(x)\,dx$.

Área entre dos curvas

Si la función $y = f(x)$ se encuentra arriba de la función $y = g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, el área entre las dos funciones situadas en el intervalo será

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La figura 19.15 es una representación gráfica de esta propiedad.

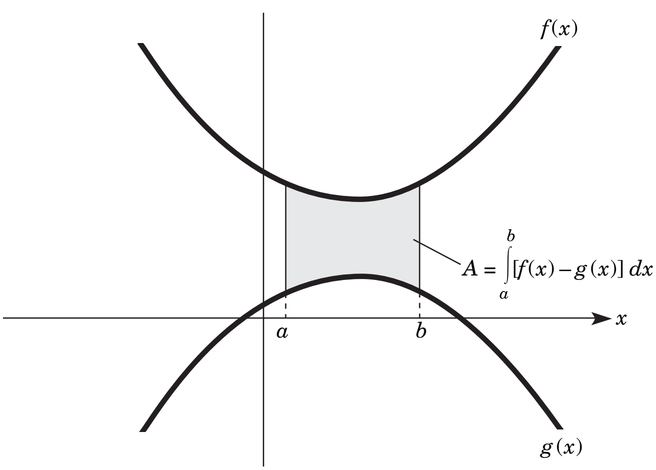


Figura 19.15 Área entre dos curvas.

Esta propiedad es en realidad una formalización del fundamento lógico del que nos hemos valido antes. Por ejemplo, se utilizó al definir el área *A* en el ejemplo 14; de manera análoga, se usó en el cálculo de *A* en el ejemplo 15. Conviene señalar que la propiedad es válida para las funciones que se hallan debajo del eje de las *x*. Para dar una aplicación examínese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16

Ponga, por ejemplo, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en la figura 19.16. Suponga que se quiere calcular el área situada entre ambas funciones en el intervalo $0 \leq x \leq 4$. Al aplicar la fórmula de la superficie de un triángulo, puede calcularse el área total como la suma de las áreas del triángulo situado sobre el eje de las *x* y el que se encuentra debajo del eje de las *x*.

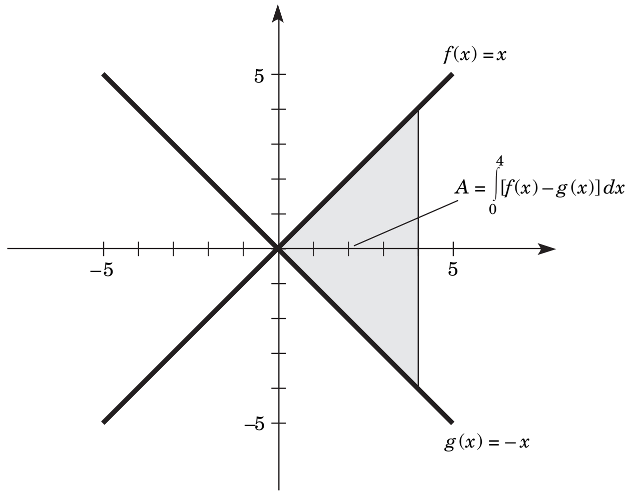


Figura 19.16

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}(4)(4) + \tfrac{1}{2}(4)(4) \\
&= 8 + 8 = 16
\end{aligned}
$$

Otra opción consiste en aplicar la propiedad formulada en páginas anteriores, de manera que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^4 [x - (-x)]\, dx \\
&= \int_0^4 2x\, dx \\
&= x^2\big]_0^4 \\
&= (4)^2 - (0)^2 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

❑

NOTA Una sugerencia para el uso de las integrales definidas para el cálculo de áreas es **siempre trazar un dibujo de las funciones implicadas**. Al tener una representación gráfica de las áreas de interés se hace más fácil identificar los límites pertinentes y comprender la lógica requerida para definir las áreas.

Sección 19.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 20: *a*) grafique *f* y *b*) determine el tamaño del área acotada entre *f* y el eje de las *x* en el intervalo señalado.

1. $f(x) = -2x + 8$, entre $x = 1$ y $x = 4$
2. $f(x) = 16 - 2x$, entre $x = 2$ y $x = 6$
3. $f(x) = x^2$, entre $x = 2$ y $x = 8$
4. $f(x) = 10 - x^2$, entre $x = -1$ y $x = 1$
5. $f(x) = 3x^3$, entre $x = 2$ y $x = 4$
6. $f(x) = -2x^3$, entre $x = 0$ y $x = 3$

7. $f(x) = -8x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
8. $f(x) = -x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$
9. $f(x) = 10 - x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
10. $f(x) = 4 - x^2$, entre $x = -5$ y $x = -2$
11. $f(x) = e^x$, entre $x = 1$ y $x = 3$
12. $f(x) = -e^x$, entre $x = 1$ y $x = 3$
13. $f(x) = -x^2 + 1$, entre $x = 0$ y $x = 3$
14. $f(x) = 5x^4 - 5$, entre $x = -1$ y $x = 2$
15. $f(x) = 40x - x^2$, entre $x = -10$ y $x = 20$
16. $f(x) = 10x - x^2$, entre $x = -5$ y $x = 5$
17. $f(x) = xe^{x^2}$, entre $x = 2$ y $x = 4$
18. $f(x) = 4xe^{x^2}$, entre $x = 1$ y $x = 3$
19. $f(x) = (1/x)$, entre $x = 5$ y $x = 10$
20. $f(x) = (5/x)$, entre $x = 2$ y $x = 5$

21. En relación con la figura 19.17, determine las combinaciones de integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C* y *d*) *D*.

22. De acuerdo con la figura 19.18, determine las combinaciones de integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*.

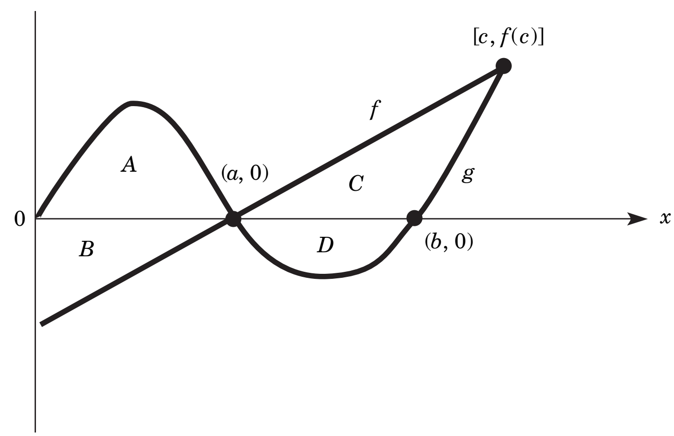


Figura 19.17

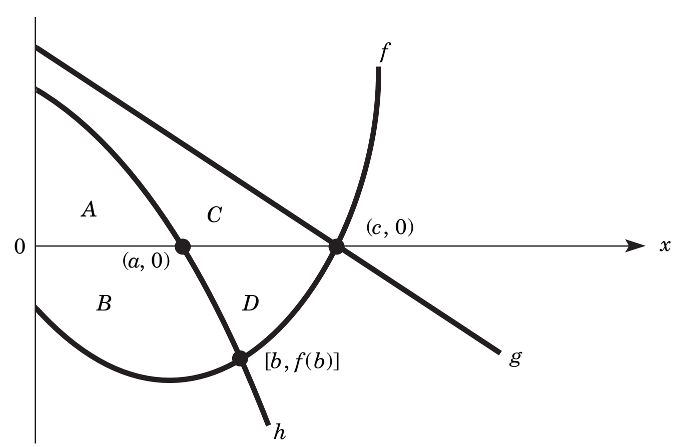


Figura 19.18

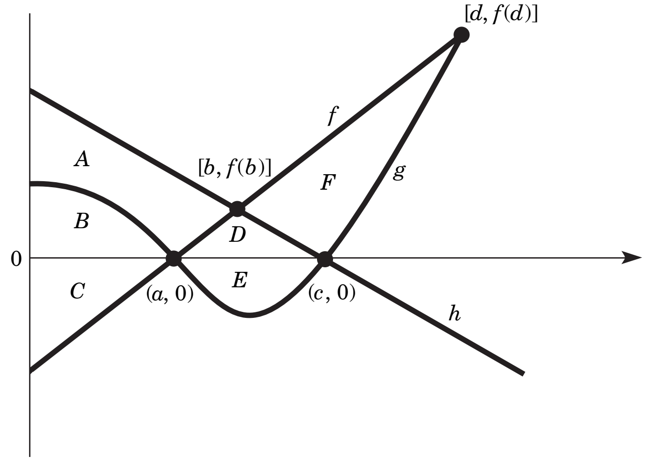


Figura 19.19

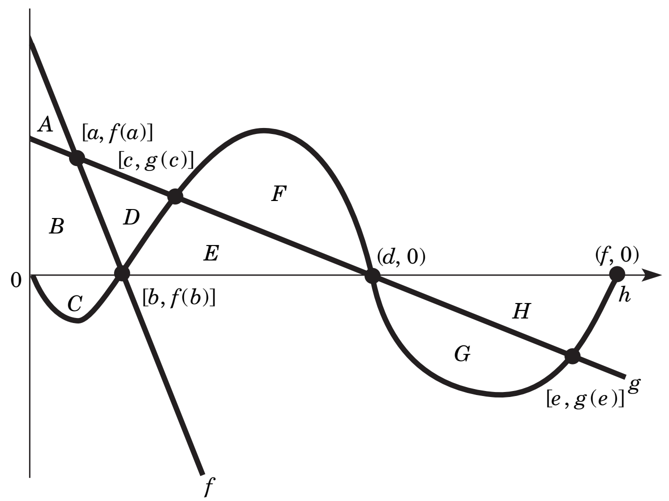


Figura 19.20

23. A partir de la figura 19.19, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E* y *f*) *F*.

24. Según la figura 19.20, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E*, *f*) *F*, *g*) *G* y *h*) *H*.

25. Dada $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 27 - x^2$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) cuando $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

26. Si se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = 64 - x^2$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) para $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

27. Dadas $f(x) = 2x$ y $g(x) = 12 - x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) si $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

28. Si se tienen $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 20 - 6x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) con $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

29. Dadas $f(x) = x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 10x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) determine el área acotada por las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 10$.

30. Si se conocen $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 8$, cuando $x \geq 0$ determine el área acotada en tres lados por las dos funciones y el eje de las y.
31. Obtenga el área entre $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.
32. Calcule el área entre $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 1 - 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 5$.
33. Encuentre el área entre $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x - 4$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.
34. Determine el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 - 2$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.
35. Calcule el área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -e^x$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.
36. Encuentre el área entre $f(x) = 2x^2 - 2x + 10$ y $g(x) = -x^2 + x + 4$ en el intervalo $1 \leq x \leq 5$.

19.3 Métodos de aproximación

Hay situaciones donde tal vez no se cuente con una regla de integración para evaluar determinado integrando, aun utilizando las tablas de las reglas de integración. Si se necesita evaluar una integral definida para la función, se dispone de métodos para aproximar su valor. En la presente sección examinaremos tres métodos numéricos de aproximación que pueden utilizarse para evaluar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Regla de los rectángulos

Si se quiere evaluar la integral definida en términos del cálculo del área debajo de una curva, un método consiste en dividir el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno con un ancho de $(b - a)/n$. Si x_i se define como el punto medio del intervalo i, puede construirse un conjunto de n rectángulos que tengan un ancho $(b - a)/n$ y altura iguales a $f(x_i)$, según se observa en la figura 19.21. Para aproximar el valor de la integral definida, se suman las áreas de los n rectángulos.

Si se denota como el ancho de cada intervalo. . . $(b - a)/n$. . . como Δx, puede expresarse la regla de los rectángulos como

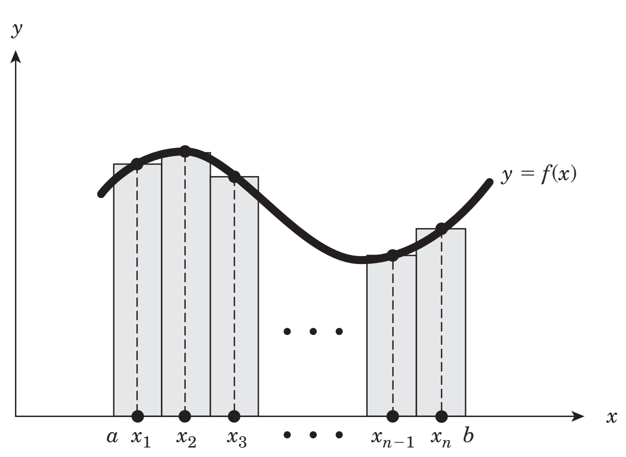


Figura 19.21 Regla de los rectángulos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$
$$\approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \qquad \textbf{(19.9)}$$

para una n suficientemente grande

Ejemplo 17 A continuación se da un ejemplo del uso de esta regla en una función relativamente simple $f(x) = x^3$. Supóngase que se desea evaluar $\int_0^4 x^3\,dx$. Se aplicará la regla de los rectángulos, dividiendo el intervalo en cuatro subintervalos iguales que tienen un ancho de 1. Como se ve en la figura 19.22, los valores del punto medio en los cuatro subintervalos son 0.5, 1.5, 2.5 y 3.5. Al aplicar la regla de los rectángulos, la aproximación numérica de la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1) + f(3.5)(1)\\ &= (0.5)^3 + (1.5)^3 + (2.5)^3 + (3.5)^3\\ &= 0.125 + 3.375 + 15.625 + 42.875\\ &= 62.0\end{aligned}$$

Confirme por su cuenta que el valor verdadero de la integral definida sea 64. La aproximación numérica lograda mediante la regla de los rectángulos *subestimó* en 2 el valor real de la integral definida.

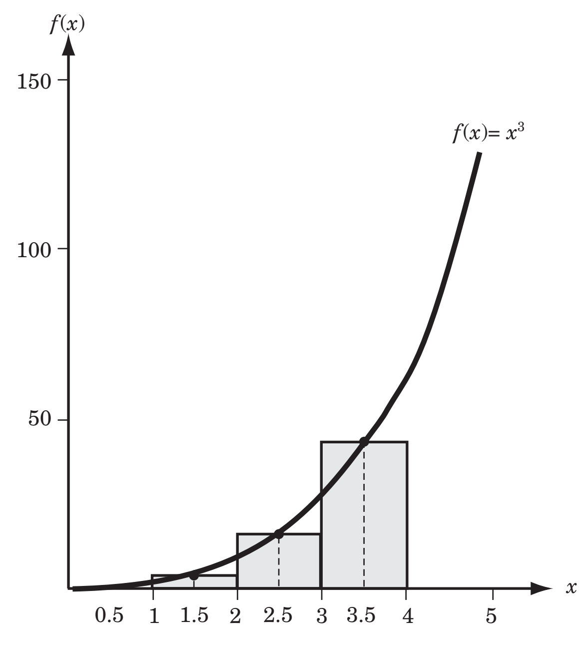


Figura 19.22 Aproximación numérica utilizando la regla de los rectángulos.

❑

Regla de los trapecios

Otro método de aproximación numérica para integrales definidas es la *regla de los trapecios.* Como ocurre con la regla de los rectángulos, el intervalo $a \leq x \leq b$ se divide en n subintervalos del mismo ancho. Como se advierte en la figura 19.23, la aproximación consiste en sumar las áreas de n trapecios definidas por los subintervalos. Las alturas de n trapecios están definidas por los puntos finales de los subintervalos.

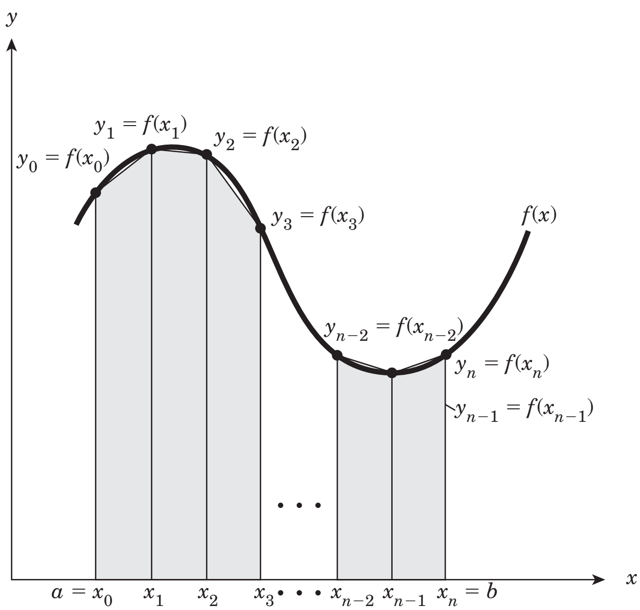


Figura 19.23 Regla de los trapecios.

En un trapecio como el que se muestra en la figura 19.24, el área del mismo se define como el producto de la base del trapecio con su altura promedio, es decir,

$$A = \Delta x[(y_1 + y_2)/2]^*$$

De este modo, si se emplean las áreas de n trapecios en la figura 19.23 para aproximar la integral definida, esta última se evalúa como

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx &[(b-a)/n][(y_0+y_1)/2] + [(b-a)/n][(y_1+y_2)/2]\\ &+ [(b-a)/n][(y_2+y_3)/2]\\ &+ \cdots + [(b-a)/n][(y_{n-1}+y_n)/2]\end{aligned}$$

o bien

* Una definición más convencional establece que el área del trapecio con lados paralelos a y b, y una altura h, es igual a $\frac{1}{2}(a + b)/h$.

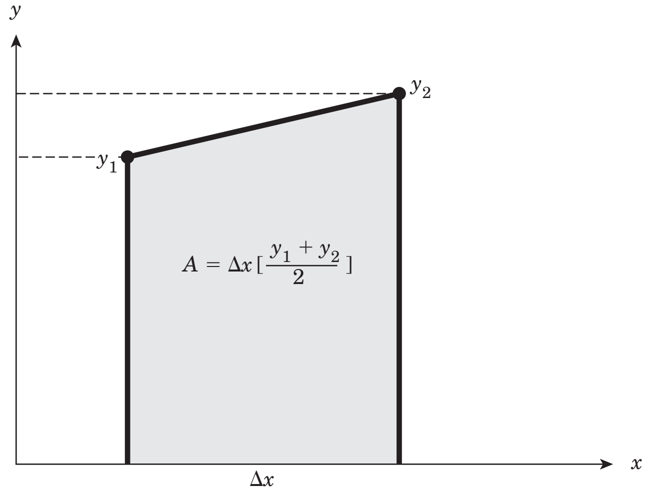


Figura 19.24 Área de trapecios.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{19.10}$$

para una n suficientemente grande

En seguida se explicará el uso de la regla de los trapecios en la evaluación de la misma integral definida del ejemplo 17.

Ejemplo 18

Haciendo uso de las mismas definiciones de los subintervalos que en el ejemplo 17, los puntos finales son 0, 1, 2, 3, 4. Por lo tanto, $y_0 = f(0) = 0$, $y_1 = f(1) = 1$, $y_2 = f(2) = 8$, $y_3 = f(3) = 27$ y $y_4 = f(4) = 64$. Utilizando la ecuación (19.10),

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx [(4-0)/2(4)][0 + 2(1) + 2(8) + 2(27) + 64]\\ &= (1/2)(0 + 2 + 16 + 54 + 64)\\ &= (1/2)(136)\\ &= 68\end{aligned}$$

Verifique que la aproximación lograda con la regla de los trapecios *sobreestime* en 4 el valor real de la integral definida. ❑

Regla de Simpson

El tercer método de aproximación numérica se denomina *regla de Simpson.* A diferencia del uso de rectángulos o trapecios para aproximar el valor de una integral definida, la regla de Simpson se basa en la estimación parabólica. De manera gráfica, el intervalo $a \leq x \leq b$ se divide en un *número par* de n subintervalos que son de idéntica anchura.

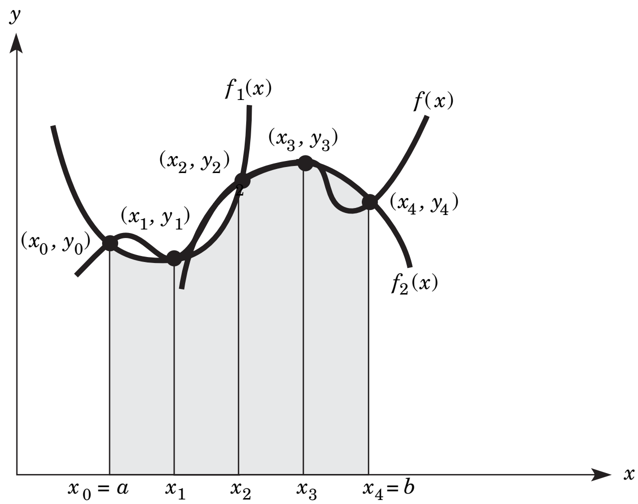


Figura 19.25 Aproximación parabólica de $f(x)$ utilizando f_1 y f_2.

Entonces, una serie de parábolas son idóneas para graficarse, una para cada *par* de subintervalos. Esto se ilustra en la figura 19.25. ¿Recuerda que tres puntos de datos definen una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$? Con la regla de Simpson, una parábola se ajusta a los puntos de datos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en los dos primeros subintervalos y otra se ajusta a los tres puntos de datos (x_2, y_2) (x_3, y_3) y (x_4, y_4) en los segundos dos subintervalos de la figura 19.25. Estas parábolas sirven para aproximar la función $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$. El área bajo $f(x)$ en este intervalo se aproxima entonces hallando las áreas bajo las dos parábolas.

Dado el caso donde $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, existe una fórmula con la cual determinar el área bajo una parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La fórmula no requiere la obtención de la función cuadrática que pase por dichos puntos. Si $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = w$, entonces

$$(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{w}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Con el fin de aproximar la integral definida, $w = (b - a)/n$. De esta manera, si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y el número de subintervalos n es par,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3n}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$
$$+ \cdots + \frac{b-a}{3n}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{19.11}$$

para n seleccionada suficientemente grande (n par).

Ejemplo 19 Nos serviremos de la regla de Simpson para aproximar la integral definida en los dos últimos ejemplos. Dado que los subintervalos se definen como iguales, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 8)$, $(x_3, y_3) = (3, 27)$ y $(x_4, y_4) = (4, 64)$. Con $a = 0$ y $b = 4$, la integral definida se estima así

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx \frac{4-0}{3(4)}[0 + 4(1) + 2(8) + 4(27) + 64]\\ &= \frac{1}{3}(192)\\ &= 64\end{aligned}$$

que es *precisamente* el valor de $\displaystyle\int_0^4 x^3\,dx$.

En términos generales, se espera que la regla de Simpson sea más exacta que la de los rectángulos o la de los trapecios en la obtención de determinado valor de n.

Ejemplo 20 A continuación se explicará el empleo de estas aproximaciones en un caso en que no se cuente con un método para calcular la integral indefinida. Supóngase que se desea evaluar

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Esta integral definida se aproxima recurriendo a tres métodos y subdividiendo en cuatro subintervalos que tengan un ancho de 0.5. La figura 19.26 contiene la definición de los puntos finales de los intervalos, lo mismo que los puntos intermedios.

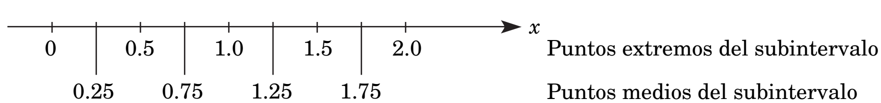


Figura 19.26 Puntos extremos y puntos medios de subintervalos.

Regla de los rectángulos

Al aplicar la ecuación (19.9),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx (0.5)[f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)]$$

$$= (0.5)\left[\frac{1}{(0.25)^2+1}+\frac{1}{(0.75)^2+1}+\frac{1}{(1.25)^2+1}+\frac{1}{(1.75)^2+1}\right]$$
$$= 0.5(0.94118 + 0.64000 + 0.39024 + 0.24615)$$
$$= 1.10879$$

Regla de los trapecios

Al aplicar la ecuación (19.10),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx \left[\frac{2-0}{(2)(4)}\right][f(0) + 2f(0.5) + 2f(1.0) + 2f(1.5) + f(2.0)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[1 + 2(0.8) + 2(0.5) + 2(0.308) + 0.2]$$
$$= \tfrac{1}{4}(4.416)$$
$$= 1.104$$

Regla de Simpson

Al aplicar la ecuación (19.11),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx \left[\frac{2-0}{(3)(4)}\right][f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + f(2.0)]$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)[1 + 4(0.8) + 2(0.5) + 4(0.308) + 0.2]$$
$$= \frac{1}{6}(6.632)$$
$$= 1.105$$

Como no podemos evaluar explícitamente esta integral definida, tampoco es posible estimar la exactitud de tales aproximaciones. La experiencia indicará que el valor conseguido con la regla de Simpson tiende a ser el más exacto. ❑

Sección 19.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida usando la regla de los rectángulos (se subdivide en cuatro intervalos); *b*) evalúe el valor exacto mediante las reglas explícitas de integración, y *c*) calcule el error de la aproximación.

1. $\int_0^4 x^2\,dx$

2. $\int_0^4 4x^2\,dx$

3. $\int_0^2 4x^3\,dx$

4. $\int_0^2 8x^3\,dx$

5. $\int_0^4 e^x\,dx$

6. $\int_1^3 3e^x\,dx$

7. $\int_2^4 (x^3 - 2x^2)\,dx$

8. $\int_2^4 (2x^3 + 3x^2)\,dx$

9. $\int_4^8 (2x)(x^2 - 5)^3\,dx$

10. $\int_4^8 (4x)(2x^2 + 10)^4\,dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida aplicando la regla de los trapecios ($n = 4$), *b*) evalúe el valor exacto mediante las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

11. $\int_1^5 (5x - 2)\,dx$

12. $\int_2^6 (20 - 4x)\,dx$

13. $\int_1^3 (4x^2 - x)\,dx$

14. $\int_3^5 (2x - 3x^2)\,dx$

15. $\int_0^4 2e^x\,dx$

16. $\int_1^5 e^{-x}\,dx$

17. $\int_0^4 (8x)(4x^2 - 5)^3\,dx$

18. $\int_0^4 (3x^2)(x^3 + 5)^3\,dx$

19. $\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$

20. $\int_0^2 xe^{2x^2}\,dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida mediante la regla de Simpson (se subdivide en cuatro intervalos), *b*) evalúe el valor exacto con las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

21. $\int_0^2 (5x + 8)\,dx$

22. $\int_0^4 (4 - 2x)\,dx$

23. $\int_1^5 (4x^2 - 5x)\,dx$

24. $\int_2^6 (x^3 - 10)\,dx$

25. $\int_0^2 (5x^4 - x)\,dx$

26. $\int_2^4 (2x - x^3)\,dx$

27. $\int_0^4 5e^x\,dx$

28. $\int_4^8 -4e^{-x}\,dx$

29. $\int_4^6 6x^2(x^3 - 1)^3\,dx$

30. $\int_2^4 4x(x^2 + 3)^3\,dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe el valor de la integral definida con las reglas explícitas de integración; *b*) aproxime la integral definida mediante la regla de los rectángulos, la regla de los trapecios y la regla de Simpson (con subdivisión en cuatro intervalos), y *c*) determine el método de aproximación más preciso.

31. $\int_0^2 10\,dx$

32. $\int_0^4 -5\,dx$

33. $\int_2^6 (x^2 - 5)\,dx$

34. $\int_4^8 (10 - x + x^2)\,dx$

35. $\int_0^2 4x^3\,dx$

36. $\int_2^4 8x^3\,dx$

37. $\int_4^6 10e^x\,dx$

38. $\int_2^4 5e^{-x}\,dx$

39. $\int_0^4 4x^3(x^4 - 1)^3\,dx$

40. $\int_0^2 6x^2(x^3 + 6)^4\,dx$

En los siguientes ejercicios, la integral definida no puede evaluarse con las reglas de integración. Aproxime dicha integral haciendo uso de los tres métodos de aproximación (con $n = 4$).

41. $\int_0^2 \frac{4}{2x^2 + 1}\,dx$

42. $\int_0^4 \frac{10}{x^2 + 4}\,dx$

43. $\int_0^4 \frac{2}{x^3 + 1}\,dx$

44. $\int_0^2 \frac{x}{x^3 + 2}\,dx$

45. $\int_2^6 \frac{1}{1 + e^x}\,dx$

46. $\int_0^4 \frac{5}{2 + e^x}\,dx$

47. $\int_0^2 \sqrt{2 + x^3}\,dx$

48. $\int_0^4 \sqrt{10 + x^3}\,dx$

19.4 Aplicaciones del cálculo integral

Los siguientes ejemplos son aplicaciones del cálculo integral.

Ejemplo 21

(Ingreso) En el capítulo 18 se analizó cómo obtener la función de ingreso total integrando la función de ingreso marginal. A manera de simple ampliación de ese concepto, supóngase que el precio de un producto es constante a un valor de $10 por unidad, esto es, la función de ingreso marginal es

$$\begin{aligned} MR &= f(x) \\ &= 10 \end{aligned}$$

donde x es el número de unidades vendidas. El ingreso total conseguido con la venta de x unidades puede determinarse al integrar la función de ingreso marginal entre 0 y x. Por ejemplo, el ingreso total logrado con la venta de 1 500 unidades se calcularía como

$$\begin{aligned} \int_0^{1\,500} 10\,dx &= 10x\Big]_0^{1\,500} \\ &= 10(1\,500) \\ &= \$15\,000 \end{aligned}$$

Se trata de un procedimiento bastante complejo para el cálculo del ingreso total, puesto que bastaría haber multiplicado el precio por la cantidad vendida para haber conseguido así el mismo resultado. No obstante, el procedimiento ejemplifica la manera de interpretar como ingreso total o incremental el área debajo de la función del ingreso marginal (fig. 19.27). El ingreso adicional relacionado con un incremento de 1 500 a 1 800 unidades en las ventas se calculará así

$$\begin{aligned} \int_{1\,500}^{1\,800} 10\,dx &= 10x\Big]_{1\,500}^{1\,800} \\ &= \$18\,000 - \$15\,000 \\ &= \$3\,000 \end{aligned}$$

Ejemplo 22

(Gastos de mantenimiento) Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ para dar mantenimiento a uno de sus modelos está representada por la función

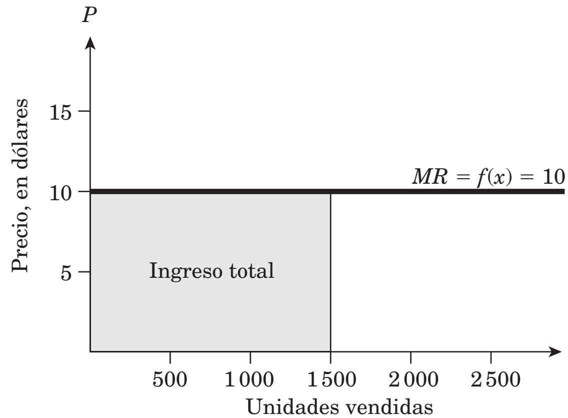


Figura 19.27

$$r(t) = 100 + 10t^2$$

donde t es la edad del automóvil expresada en años y r(t) se mide en dólares por año. Esta función indica que cuando el automóvil tenga un año de uso, los gastos de mantenimiento se harán a una tasa de

$$\begin{aligned} r(1) &= 100 + 10(1)^2 \\ &= \$110 \text{ por año} \end{aligned}$$

Cuando tenga tres años de uso, estarán realizándose a una tasa de

$$\begin{aligned} r(3) &= 100 + 10(3)^2 \\ &= \$190 \text{ por año} \end{aligned}$$

Como cabe suponer, cuanto más viejo sea el automóvil, más mantenimiento requerirá. La figura 19.28 ilustra la gráfica de la tasa de la función de costos.

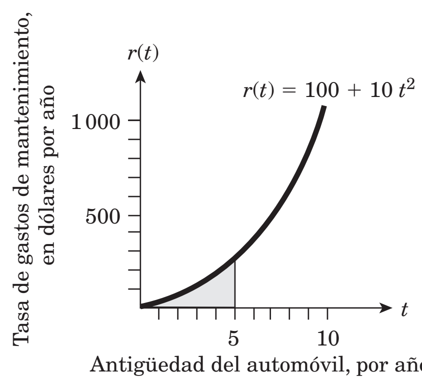


Figura 19.28 Tasa de la función de gasto.

El área bajo esta curva entre dos valores cualesquiera de t es una medida del costo esperado de mantenimiento durante ese intervalo. Los gastos esperados de mantenimiento durante los primeros cinco años de vida del automóvil se calculan como sigue

$$\int_0^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Bigg]_0^5$$
$$= 100(5) + \frac{10(5)^3}{3} = 500 + 416.67 = \$916.67$$

De estos gastos, los que se espera hacer *durante el quinto año* se estiman como

$$\int_4^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Bigg]_4^5$$
$$= \left[100(5) + \frac{10(5)^3}{3}\right] - \left[100(4) + \frac{10(4)^3}{3}\right]$$
$$= 916.67 - (400 + 213.33)$$
$$= \$303.34$$

Ejemplo 23 **(Recaudación de fondos)** Una organización cívica estatal está efectuando su campaña anual de fondos que se destinan a un programa de campamento de verano para minusválidos. Los gastos de la campaña se realizarán a una tasa de \$10 000 diarios. Por experiencias anteriores se sabe que las aportaciones serán altas en las primeras fases de la campaña y tenderán a disminuir con el paso del tiempo. La función que describe la tasa a que se reciben los donativos es

$$c(t) = -100t^2 + 20\,000$$

donde t representa el día de la campaña y c(t) es igual a la tasa a la que se reciben las contribuciones, medidas en dólares por día. La organización desea maximizar las utilidades netas de la campaña.

a) Determine cuánto debería durar la campaña a fin de maximizar las utilidades netas.
b) ¿Cuáles se espera que sean los gastos totales de la campaña?
c) ¿Cuáles se espera que sean las aportaciones totales?
d) ¿Cuáles se espera que sean las utilidades netas (aportaciones totales menos los gastos totales)?

SOLUCIÓN

a) La función que describe la tasa a que se realizan los gastos $e(t)$ es

$$e(t) = 10\,000$$

La figura 19.29 muestra las dos funciones. Cuanto más exceda la tasa a la que se hacen los donativos a la de los gastos de campaña, las *utilidades netas* serán positivas. Consulte la figura 19.29. Las utilidades netas serán positivas hasta que las gráficas de las dos funciones se intersequen. Más allá de este punto, la tasa de gastos excede la tasa de las aportaciones. Es decir, los donativos se recibirán a una tasa de menos de \$10 000 por día.

Las gráficas de las dos funciones se intersecan cuando

$$c(t) = e(t)$$

o cuando $$-100t^2 + 20\,000 = 10\,000$$

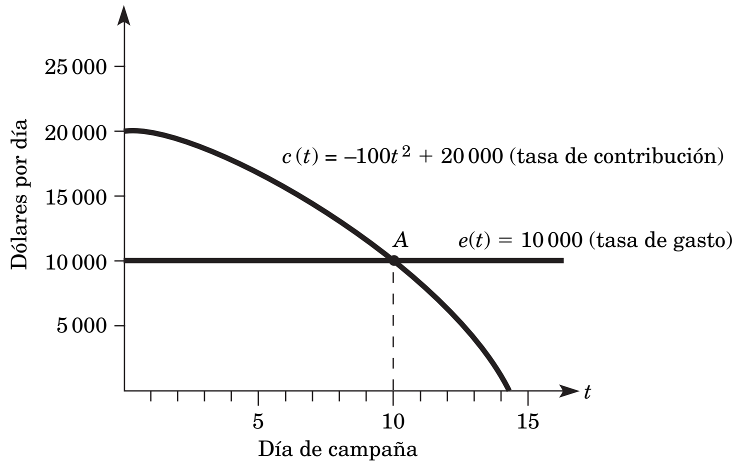


Figura 19.29 Contribuciones para el aumento de recaudación de fondos y funciones de gasto.

$$-100t^2 = -10\,000$$
$$t^2 = 100$$
$$t = 10 \text{ días}$$

(Raíz negativa sin sentido.)

b) Los gastos totales de la campaña están representados por el área bajo e entre $t = 0$ y $t = 10$. Esto podría obtenerse al integrar e entre estos límites o, más simple, multiplicando:

$$\begin{aligned} E &= (\$10\,000 \text{ por día})(10 \text{ días}) \\ &= \$100\,000 \end{aligned}$$

c) Las aportaciones totales durante 10 días están representadas por el área bajo c entre $t = 0$ y $t = 10$, o

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{10} (-100t^2 + 20\,000)\, dt \\ &= -100\frac{t^3}{3} + 20\,000t \Big]_0^{10} \\ &= \frac{-100(10)^3}{3} + 20\,000(10) \\ &= -33\,333.33 + 200\,000 = \$166\,666.67 \end{aligned}$$

d) Las utilidades netas serán, según las previsiones,

$$\begin{aligned} C - E &= \$166\,666.67 - \$100\,000 \\ &= \$66\,666.67 \end{aligned}$$

Ejemplo 24 **(Administración del banco de sangre; escenario de motivación)** El banco de sangre de un hospital realiza una campaña de donación de sangre para reponer su inventario. El hospital estima que se donará sangre a una tasa de $d(t)$ pintas por día, donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y *t indica la duración de la campaña de sangre en días*. Si la meta de la campaña es obtener 1 000 pintas, ¿cuándo habrá alcanzado esa meta el hospital?

SOLUCIÓN

En este problema, el área entre la gráfica de d y el eje de las t representa los donativos totales de sangre, en pintas. A diferencia de las aplicaciones anteriores, el área deseada ya se conoce; la incógnita es el límite superior de integración, como se observa en la figura 19.30. El hospital alcanzará su meta cuando

$$\int_0^{t^*} 500e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al reescribir el integrado

$$\int_0^{t^*} -1\,250(-0.4)e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

o bien

$$-1\,250\int_0^{t^*} -0.4e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al evaluar la integral definida y resolviendo para t^*,

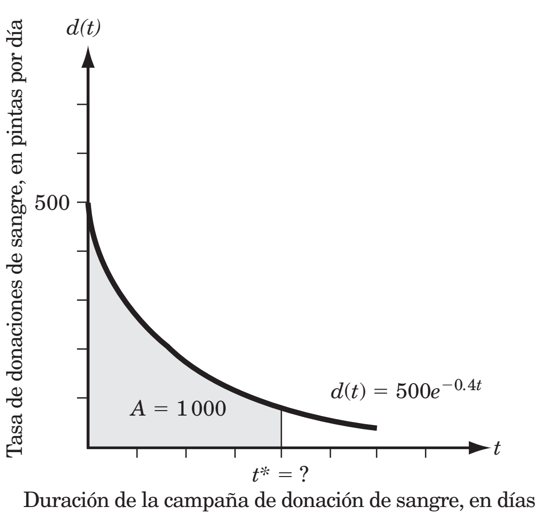


Figura 19.30 Determinación del límite superior de integración.

$$-1\,250[e^{-0.4t}]_0^{t^*} = 1\,000$$

$$-1\,250[e^{-0.4t^*} - e^{-0.4(0)}] = 1\,000$$

$$-1\,250[e^{-0.4t^*} - 1] = 1\,000$$

$$-1\,250e^{-0.4t^*} + 1\,250 = 1\,000$$

$$-1\,250e^{-0.4t^*} = -250$$

$$e^{-0.4t^*} = \frac{-250}{-1\,250}$$

$$e^{-0.4t^*} = 0.2$$

Si se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación (usando la tabla 2),

$$-0.4t^* = -1.6094$$

$$t^* = \frac{-1.6094}{-0.4}$$

o

$$t^* = 4.0235$$

Así pues, el hospital alcanzará su meta en cuatro días, aproximadamente.

Ejemplo 25 **(Energía nuclear)** Una compañía eléctrica ha propuesto construir una planta de energía nuclear en las afueras de una gran área metropolitana. Como cabe suponer, la opinión pública está dividida al respecto y se han suscitado acaloradas discusiones. Un grupo que se opone a la construcción de la planta ha ofrecido algunos datos discutibles sobre las consecuencias de un accidente catastrófico que pudiera ocurrir en la planta. Este grupo estima que la tasa a la que se producirían las muertes en la zona metropolitana por precipitación radiactiva se describe con la función

$$r(t) = 200\,000e^{-0.1t}$$

donde $r(t)$ *representa la tasa de fallecimientos por día, y t representa el tiempo transcurrido desde el accidente, medido en días.* (*Nota*: ¡Aunque la controversia en este ejemplo es muy real, los datos son ficticios!) La población del área metropolitana es de 1.5 millones de personas.

a) Determine el número esperado de muertes un día después de un gran accidente.

b) ¿Cuánto tardarán todos los habitantes de esa zona en sucumbir ante los efectos de la radiactividad?

SOLUCIÓN

a) La figura 19.31 ofrece una gráfica de r. El área debajo de esta función entre dos puntos cualesquiera t_1 y t_2 es una medida del número esperado de fallecimientos durante ese intervalo de tiempo. Así pues, el número de muertes esperadas en el primer día se calcularía como

$$\int_0^1 200\,000e^{-0.1t}\,dt = \int_0^1 -2\,000\,000(-0.1)e^{-0.1t}\,dt$$

$$= -2\,000\,000 \int_0^1 (-0.1)e^{-0.1t}\,dt$$

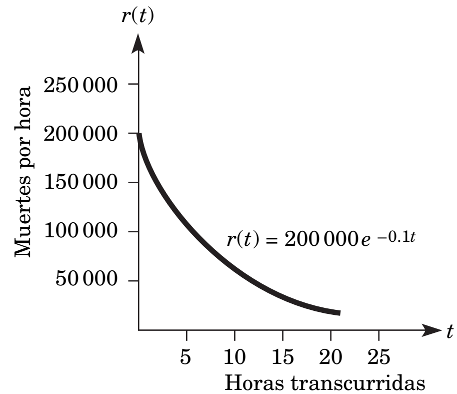


Figura 19.31 Tasa de mortalidad.

$$\begin{aligned} &= -2\,000\,000\, e^{-0.1t}\Big]_0^1 \\ &= -2\,000\,000\, e^{-0.1} + 2\,000\,000 e^{0} \\ &= -2\,000\,000(e^{-0.1} - e^{0}) \\ &= -2\,000\,000(0.9048 - 1) \\ &= -2\,000\,000(-0.0952) = 190\,400 \text{ personas} \end{aligned}$$

b) Por terrible que parezca, la población entera sucumbiría al cabo de t^* días, donde

$$\int_0^{t^*} 200\,000 e^{-0.1t}\, dt = 1\,500\,000$$

o cuando

$$-2\,000\,000 e^{-0.1t}\Big]_0^{t^*} = 1\,500\,000$$

Despejando t^* se obtiene

$$\begin{aligned} -2\,000\,000 e^{-0.1t^*} + 2\,000\,000 &= 1\,500\,000 \\ -2\,000\,000 e^{-0.1t^*} &= -500\,000 \\ e^{-0.1t^*} &= 0.25 \end{aligned}$$

Si se calcula el logaritmo natural (tabla 2) en ambos lados de la ecuación,

$$-0.1t^* = -1.3863$$

o bien

$$t^* = 13.863 \text{ días}$$

Ejemplo 26

(Superávit del consumidor) Una manera de medir el valor o utilidad que un producto tiene para el consumidor es el precio que está dispuesto a pagar por él. Los economistas sostienen que los consumidores en realidad reciben un valor de superávit en los productos que adquieren, atendiendo al modo de funcionar el mercado.

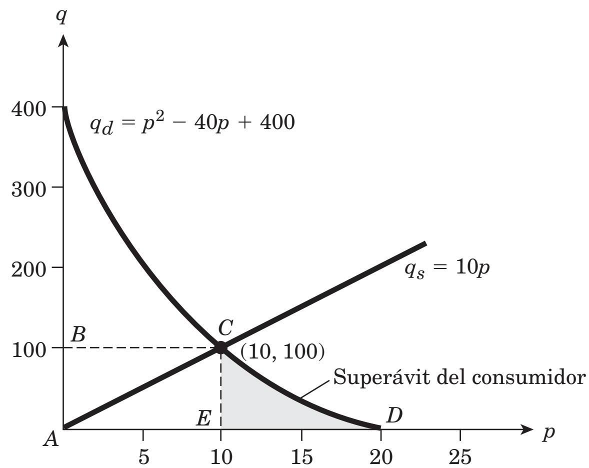


Figura 19.32 Superávit del consumidor.

La figura 19.32 describe las funciones de oferta y demanda para un producto. El equilibrio se da cuando se cobra un precio de \$10 y la demanda es de 100 unidades. Si se emplean dólares para representar el valor que este producto tiene para los consumidores, según las prácticas contables modernas el ingreso total (\$10 · 100 unidades = \$1 000) es una medida del *valor económico* del producto. Esta medida de valor está representada por el área del rectángulo *ABCE*.

Sin embargo, si se tiene presente la naturaleza de la función de demanda, habría habido una demanda del producto a precios mayores que \$10. En otras palabras, habría habido consumidores dispuestos a pagar casi \$20 por el producto. Y otros habrían sido atraídos al mercado con precios que oscilen entre \$10 y \$20. Si se supone que el precio que estarían dispuestos a pagar es una medida de la utilidad que el producto tiene para ellos, en realidad recibirán un bono cuando el precio de mercado sea \$10. Consulte de nuevo la figura 19.32. Los economistas afirmarían que una medida de la utilidad real del producto es el área *ABCDE*. Y cuando el mercado está en equilibrio, la utilidad adicional recibida por los consumidores, denominada el ***superávit del consumidor***, se representa con el área sombreada *CDE*. Esta área se puede calcular como

$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} (p^2 - 40p + 400)\, dp &= \frac{p^3}{3} - 20p^2 + 400p \Big]_{10}^{20} \\ &= \left[\frac{(20)^3}{3} - 20(20)^2 + 400(20)\right] \\ &\quad - \left[\frac{(10)^3}{3} - 20(10)^2 + 400(10)\right] \\ &= 2\,666.67 - 2\,333.33 = \$333.34\end{aligned}$$

Nuestros métodos contables modernos valuarían la utilidad del producto en \$1 000. Los economistas afirmarían que la utilidad real es de \$1 333.34, o sea que el superávit del consumidor es de \$333.34. Esta medida de utilidad adicional, o bono, se aplica en particular a los consumidores que estarían dispuestos a pagar más de \$10.

Ejemplo 27 **(Volumen de un sólido de revolución)** Considere la función *f* en la figura 19.33. Si el medio plano acotado por *f*, el eje de las *x* y las líneas $x = a$ y $x = b$ se gira en torno al eje de las *x* una revolución completa, se formará una ***superficie de revolución***.

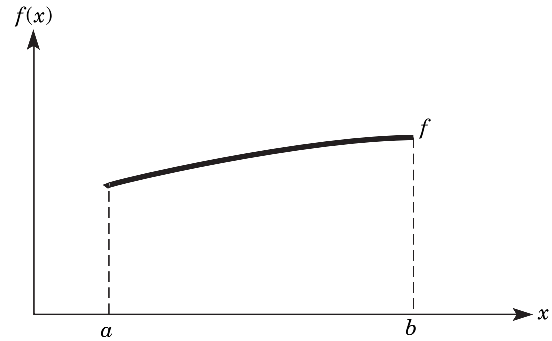


Figura 19.33

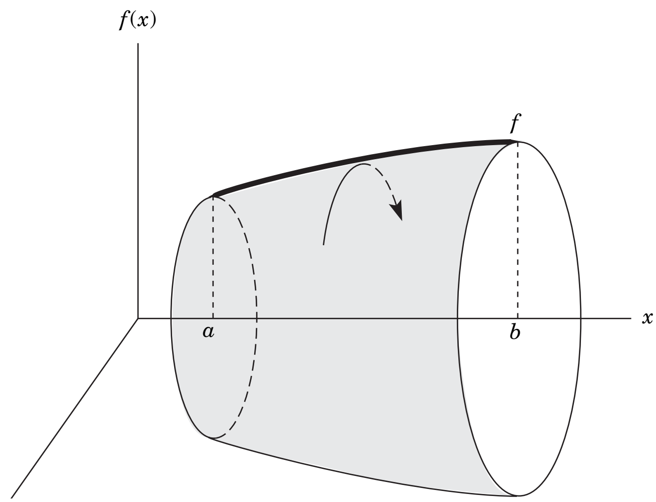


Figura 19.34 Superficie de revolución.

Cada punto de f describe una trayectoria circular. La trayectoria compuesta de todos los puntos f en el intervalo $a \leq x \leq b$ es la superficie de revolución que se muestra en la figura 19.34.

A la superficie de revolución corresponde un ***sólido de revolución***. Éste es el volumen que describe el plano a medida que la gráfica de f es girada alrededor del eje de las x. Supóngase que se desea obtener el volumen del sólido de revolución. Podría estimarse el volumen formando un sólido aproximado de revolución integrado por cilindros circulares rectos como los que se observan en la figura 19.35. En esta figura, el intervalo $a \leq x \leq b$ ha sido subdividido en subintervalos iguales de ancho Δx. La altura de cada cilindro recto es Δx. Y su radio es $f(x_i)$, donde x_i es el valor izquierdo de x para el subintervalo i.

Como se aprecia en la figura 19.36, el volumen del cilindro derecho que tiene un radio r y una altura h es

$$V = \pi r^2 h$$

donde π(pi) = 3.14. . . . Para cada cilindro recto de la figura 19.35, el volumen será

$$V_i = \pi[f(x_i)]^2 \, \Delta x$$

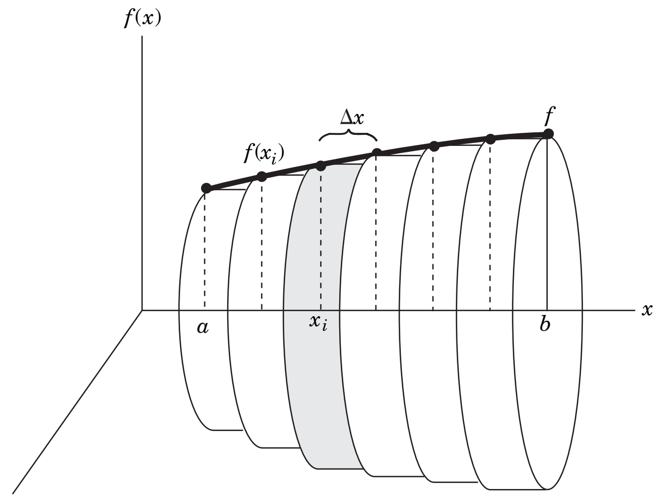


Figura 19.35

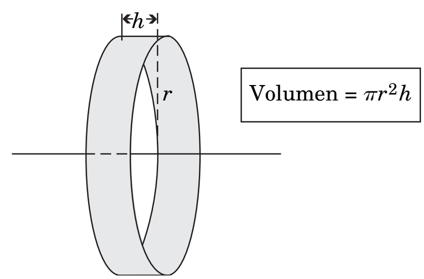


Figura 19.36 Cilindro circular de altura h y radio r.

Si el intervalo $a \leq x \leq b$ se ha subdividido en n subintervalos iguales, el volumen estimado del sólido de revolución es

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2\,\Delta x$$

La estimación será más exacta a medida que el intervalo $a \leq x \leq b$ se subdivide en un número mayor de subintervalos, aproximándose Δx a 0.

Definición: Volumen de un sólido de revolución

En una función f que es continua en un intervalo $a \leq x \leq b$, el volumen del sólido de revolución generado a medida que la función se gira una revolución alrededor del eje de las x se define con

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2\,\Delta x$$

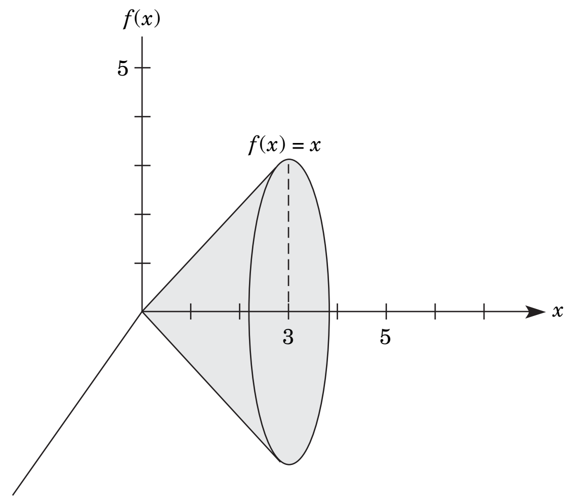


Figura 19.37

Cuando existe el límite, puede probarse que

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx \tag{19.12}$$

Dada la función $f(x) = x$, suponga que se desea calcular el volumen del sólido de revolución generado a medida que la gráfica de f, entre $x = 0$ y $x = 3$, se gira alrededor del eje de las x. Este sólido de revolución se ilustra en la figura 19.37. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi(x)^2\, dx \\ &= \pi \frac{(x)^3}{3}\Bigg]_0^3 \\ &= \pi\left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] \\ &= 9\pi \\ &\doteq 28.26 \text{ unidades cúbicas} \end{aligned}$$

❑

Sección 19.4 Ejercicios de seguimiento

1. La función del ingreso marginal del producto de una firma es

$$MR = -0.04x + 10$$

donde x es el número de unidades vendidas.

a) Determine el ingreso total conseguido con la venta de 200 unidades del producto.

b) ¿Cuál es el ingreso agregado que se logra con un incremento de 100 a 200 unidades en la venta?